

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 7

Serie nona

1 Luglio 1952

Sullo spettro di energia degli elettroni negli sciami estesi di raggi cosmici.

C. MILONE

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

(ricevuto il 18 Aprile 1952)

Riassunto. — Viene studiato a Catania, 40 m s.l.d.m., mediante contatori di G.M., lo spettro di energia degli elettroni negli sciami estesi dei raggi cosmici a due distanze d dal sistema che rivela gli sciami ($d = 0$ e $d = 50$ m) prendendo in considerazione successivamente sciami aventi nella parte centrale densità media $\Delta = 72; 42; 25; 12,5; 6,25; 3,14$ particelle/m². I risultati sperimentali mostrano che lo spettro di energia degli elettroni negli sciami può essere espresso dalla relazione $N = K(E + E_c)^{-\varepsilon}$, dove N è il numero di elettroni con energia maggiore di E , E_c è l'energia critica in aria, ed ε è un esponente che dipende dalla densità media dello sciame e dalla distanza degli elettroni dall'asse dello sciame. I valori sperimentali di ε risultano inferiori ai valori che si ricavano dalla teoria a cascata elettrofotonica, cioè lo spettro sperimentale è più duro di quello previsto dalla teoria. Inoltre alla distanza $d = 50$ m si trovano elettroni con energia troppo elevata per appartenere ad una cascata elettronica iniziata nell'alta atmosfera da un singolo elettrone. Per interpretare i risultati sperimentali viene abbandonata l'ipotesi della cascata puramente elettronica e viene ammesso che negli sciami estesi gli elettroni siano prodotti anche da parte di una componente meno assorbita degli elettroni in aria, la quale alimenta lo sciame e contribuisce allo sviluppo di esso.

1. - Introduzione.

Nella maggior parte delle esperienze finora eseguite sulle particelle molli degli sciame estesi dei raggi cosmici è stato preso in considerazione solo il numero delle particelle indipendentemente dalla loro energia, ed i risultati sperimentali sono in buon accordo con le previsioni della teoria a cascata elettronica per quanto gli sciame, come è noto, non sono dovuti ad una semplice cascata di elettroni e fotoni. Scarso sono invece le misure in cui viene presa in considerazione anche l'energia delle particelle. D'altra parte, misure di energia possono fornire ulteriori indicazioni sul meccanismo con cui gli sciame estesi vengono prodotti.

In questo lavoro viene studiato lo spettro di energia della componente elettronica degli sciame estesi dei raggi cosmici a due distanze dall'asse dello sciame, prendendo in considerazione successivamente sciame aventi nella parte centrale una determinata densità media di particelle. Le misure sono state eseguite a Catania, 40 m s.l.d.m., con contatori di Geiger e Müller.

2. - Dispositivo sperimentale.

Il dispositivo sperimentale era costituito da tre gruppi di contatori non schermati *A*, *B*, *C*, disposti in un piano orizzontale ai vertici di un triangolo equilatero di quattro metri di lato, da un quarto gruppo di contatori *D* posto nel centro *O* di *ABC*, e da un quinto gruppo di contatori *E* posti alla distanza

$d = 50$ m da *O* nel piano di *ABC* (fig. 1 *a*). I gruppi *ABC* erano destinati a rivelare gli sciame i cui assi cadono in prossimità del triangolo *ABC* ⁽¹⁾, mentre

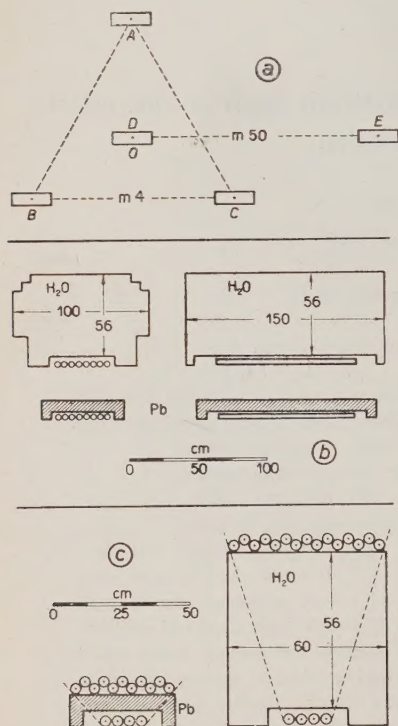


Fig. 1. - *a*) Disposizione dei gruppi di contatori *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. *b*) I gruppi *E*, per un particolare valore di *S*, schermati da piombo o da acqua. *c*) I gruppi *D* e *D'* per un particolare valore di *S*.

⁽¹⁾ Una discussione su questo argomento è stata fatta da: C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI: *Nuovo Cimento*, **7**, 207 (1950).

i gruppi D ed E , sopra ed ai lati dei quali venivano posti successivamente diversi assorbenti di piombo o di acqua (fig. 1 *b*), erano destinati a rivelare le particelle appartenenti agli sciami rivelati da ABC e presenti sotto un determinato spessore s di materiale assorbente. A tal fine venivano registrati gli eventi del tipo $A+B+C=T$, $A+B+C+D=T+D$, ed $A+B+C+E=T+E$ facendo assumere allo spessore s dell'assorbente (sia piombo che acqua) successivamente i seguenti valori: $s = 0, 7, 28, 56$ g/cm².

Sono state eseguite diverse serie di misure facendo assumere successivamente alle superfici S_A, S_B, S_C rispettivamente dei gruppi di contatori A, B, C , i valori $S_A = S_B = S_C = 140, 240, 400, 800, 1600, 3200$ cm². Ogni serie di misure risulta quindi distinta dalle altre per il suo valore di $S_A = S_B = S_C$ che sarà indicato con S .

La superficie S_D dei contatori del gruppo D era generalmente eguale ad S , e veniva mantenuta costante al variare dello spessore s dell'assorbente. La superficie S_E dei contatori del gruppo E era generalmente eguale ad S nel caso $s = 0$; essa veniva poi regolata al variare di s in modo tale da mantenere approssimativamente costante il prodotto $S_E \Delta_E$, avendo indicato con Δ_E la densità delle particelle di sciami presenti sotto lo spessore s . Una misura preliminare è stata eseguita al fine di determinare come bisogna far variare S_E per mantenere approssimativamente tale condizione.

Altre serie di misure sono state eseguite ponendo sopra gli schermi del gruppo D e del gruppo E rispettivamente i gruppi di contatori D' ed E' (fig. 1 *c*). L'aggiunta di questi gruppi aveva lo scopo di eliminare nel computo delle particelle presenti sotto lo spessore s , quelle particelle che giungono sull'assorbente come particelle non ionizzanti e l'oltrepassano come ionizzanti (per esempio, fotoni che generano elettroni negli schermi). A tal fine venivano registrati gli eventi del tipo $T, T+D, T+D+D', T+E$ e $T+E+E'$. Le superfici dei gruppi D' ed E' erano rispettivamente maggiori delle superfici dei gruppi D ed E , in modo che quasi tutte le particelle che colpivano D dovevano attraversare D' e quelle che colpivano E dovevano attraversare E' ; inoltre la posizione di D' rispetto a D e di E' rispetto ad E veniva tenuta fissa al variare di s , in modo da evitare eventuali cause di errori dipendenti da una differente disposizione geometrica.

I contatori adoperati avevano dimensioni di $5 \times 28 = 140$, $4 \times 60 = 240$, $4 \times 100 = 400$ cm², avevano pareti di ottone di 1 mm di spessore ed erano riempiti con una miscela di argon ed alcool. Raggruppamenti di contatori per ottenere superfici maggiori sono stati effettuati solo con contatori 4×100 cm².

3. - I circuiti di registrazione.

Gli eventi $T, T+D, T+E, T+D+D'$, e $T+E+E'$ venivano registrati mediante circuiti di coincidenze del tipo Rossi con tempo di risoluzione

di 25 microsecondi. Gli impulsi provenienti dai gruppi A , B , C venivano inviati ad un circuito di coincidenze triple che registrava gli eventi $A + B + C = T$. L'impulso positivo T proveniente dalle placche delle coincidenze veniva invertito ed inviato ad altri circuiti di coincidenze per la registrazione degli altri tipi di eventi. L'inversione dell'impulso veniva effettuata con un dispositivo simile a quello descritto da SINGER⁽²⁾; nel nostro caso l'impulso positivo veniva inviato alla griglia di una 6V6 polarizzata a -65 V, e si otteneva alla placca un impulso negativo di una decina di volt per ogni impulso $A + B + C$, mentre gli impulsi del tipo $A + B$, $A + C$, $B + C$, venivano bloccati dalla

elevata polarizzazione negativa della griglia.

A seconda dei valori di S le varie disposizioni sperimentali differivano leggermente fra loro:

a) Per $S = 140, 240, 400$, anzichè un solo gruppo di contatori D sono stati di spostati contemporaneamente quattro gruppi di contatori D , coperti rispettivamente da schermi di spessore $s = 0, 7, 28, 56$ g cm⁻² ed indicati

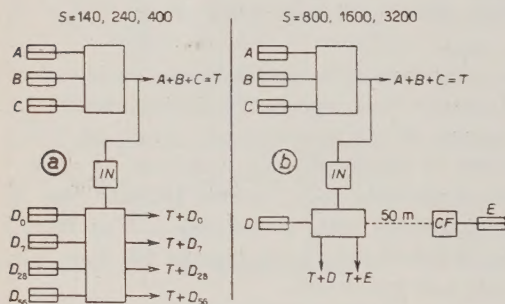


Fig. 2. - I circuiti di registrazione.

rispettivamente con D_0 , D_7 , D_{28} , D_{56} (fig. 2 a). L'impulso T invertito veniva inviato a quattro circuiti di coincidenze doppie $T + D$ i quali, rispettivamente, registravano contemporaneamente gli eventi $T + D_0$, $T + D_7$, $T + D_{28}$, $T + D_{56}$.

Nello stesso modo è stata eseguita in un secondo tempo la registrazione degli eventi T e $T + D + D'$. La registrazione degli eventi $T + E$ e $T + E + E'$ non è stata eseguita.

b) Per $S = 800, 1600$ e 3200 in un primo tempo veniva eseguita, contemporaneamente, la registrazione degli eventi T , $T + D$ e $T + E$ per $s = 0$, successivamente venivano registrati gli stessi eventi per $s = 7$ e così via fino ad $s = 56$ (fig. 2 b). Per la determinazione degli eventi del tipo $T + D + D'$ sono state eseguite altre serie di misure registrando contemporaneamente gli eventi $T + D$ e $T + D + D'$. Nel caso $S = 1600$ è stata inoltre eseguita un'altra serie di misure registrando contemporaneamente gli eventi del tipo T , $T + E$ e $T + E + E'$.

Durante tutte le misure l'efficienza dei circuiti di registrazione veniva controllata periodicamente intercalando fra le normali misure delle misure di

(2) S. F. SINGER: *Phys. Rev.*, **81**, 579 (1951).

controllo le quali consistevano nel fare registrare contemporaneamente ai vari circuiti un medesimo tipo di eventi. Gli scarti fra le varie registrazioni risultavano inferiori a qualche unità su mille.

4. - I risultati sperimentali.

Ai risultati delle misure è stata apportata la correzione per gli eventi casuali. Tale correzione risultava elevata per gli eventi T relativi al caso $S = 3200$. In questo caso il valore effettivo degli eventi T , anziché dalla differenza T registrati $- T$ casuali, veniva dedotto dalla differenza $(T + D_{s=0})$ registrati $- (T + D_{s=0})$ casuali $= T + D_{s=0}$, essendo noto il valore teorico del rapporto $T/(T + D_{s=0})$ il quale per $S = 3200$ è 1,5. A tale scopo durante tutte le misure eseguite con $S = 3200$ venivano registrati gli eventi $T + D_{s=0}$.

I valori degli eventi del tipo T , $T + D$ e $T + E$, corretti dagli eventi casuali sono riportati nelle tabelle I e II. In esse sono riportati il valore di S ed il relativo valore di γ nello spettro di densità $F(\Delta) = K\Delta^{-\gamma}$, lo spessore s dell'assorbente, la durata della misura in minuti primi ed i valori di S_E . Nelle ultime colonne sono riportati i valori di R = rapporto fra la densità di particelle che oltrepassano uno spessore s di assorbente ad una determinata distanza dall'asse dello sciame e la densità di particelle nella parte centrale dello sciame. Gli errori riportati si riferiscono alle oscillazioni statistiche.

TABELLA I. - Determinazione di R_E nei casi $S_E = \text{costante}$ ed $S_E \Delta_E = \text{costante}$.
 $S = 800$; $\gamma = 1,40$.

| Schermo | | Minuti | T | S_E | $T + E$ | $\frac{T + E}{T}$ | R_E | |
|--------------------|----|--------|-------|-------|---------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $g\text{ cm}^{-2}$ | mm | | | | | | | |
| Pb | 0 | 0 | 5 687 | 1 290 | 3 200 | 568 | $0,441 \pm 0,012$ | $0,102 \pm 0,006$ |
| | 7 | 6 | 4 575 | 1 020 | » | 488 | $0,478 \pm 0,015$ | $0,115 \pm 0,007$ |
| | 28 | 25 | 2 417 | 568 | » | 169 | $0,298 \pm 0,018$ | $0,051 \pm 0,004$ |
| | 56 | 50 | 3 845 | 900 | » | 198 | $0,220 \pm 0,014$ | $0,032 \pm 0,003$ |
| | 84 | 75 | 4 980 | 1 140 | » | 173 | $0,151 \pm 0,009$ | $0,019 \pm 0,001$ |
| Pb | 0 | 0 | 5 530 | 1 185 | 800 | 268 | $0,226 \pm 0,016$ | $0,138 \pm 0,011$ |
| | 7 | 6 | 3 658 | 810 | 800 | 190 | $0,234 \pm 0,020$ | $0,145 \pm 0,012$ |
| | 28 | 25 | 4 738 | 1 050 | 1 600 | 240 | $0,228 \pm 0,017$ | $0,075 \pm 0,006$ |
| | 56 | 50 | 4 210 | 945 | 2 400 | 170 | $0,180 \pm 0,012$ | $0,033 \pm 0,003$ |

Nella tab. I sono riportati i risultati di una misura preliminare eseguita al fine di determinare come bisogna fare variare S_E per realizzare approssima-

TABELLA II.

| S cm ² | S_D cm ² | γ | Schermo g cm ⁻² | Minuti | T | $T+D$ | S_E | $T+E$ | R_D | R_E |
|------------------------|--------------------------|----------|-------------------------------|--------|--------|-------|-------|-------|------------------|-------------------|
| 140 | 140 | 1,47 | H ₂ O 0 | 15 850 | 272 | 176 | — | — | 1,0 \pm 0,12 | — |
| | | | 7 | » | » | 168 | — | — | 0,90 \pm 0,09 | — |
| | | | 28 | » | » | 155 | — | — | 0,75 \pm 0,08 | — |
| | | | 56 | » | » | 140 | — | — | 0,60 \pm 0,05 | — |
| 240 | 240 | 1,45 | Pb 0 | 23 370 | 955 | 621 | — | — | 1,0 \pm 0,06 | — |
| | | | 7 | » | » | 671 | — | — | 1,2 \pm 0,08 | — |
| | | | 28 | » | » | 590 | — | — | 0,85 \pm 0,05 | — |
| | | | 56 | » | » | 354 | — | — | 0,32 \pm 0,02 | — |
| 400 | 400 | 1,44 | Pb 0 | 3 370 | 332 | 216 | — | — | 1,0 \pm 0,10 | — |
| | | | 7 | » | » | 237 | — | — | 1,2 \pm 0,12 | — |
| | | | 28 | » | » | 199 | — | — | 0,77 \pm 0,09 | — |
| | | | 56 | » | » | 116 | — | — | 0,30 \pm 0,04 | — |
| 800 | 800 | 1,40 | Pb 0 | 5 530 | 1 185 | 770 | 800 | 268 | 1,0 \pm 0,04 | 0,138 \pm 0,011 |
| | | | 7 | 3 658 | 810 | 564 | 800 | 190 | 1,15 \pm 0,06 | 0,145 \pm 0,012 |
| | | | 28 | 4 738 | 1 050 | 546 | 1 600 | 240 | 0,56 \pm 0,03 | 0,075 \pm 0,006 |
| | | | 56 | 4 210 | 945 | 344 | 2 400 | 170 | 0,29 \pm 0,02 | 0,033 \pm 0,003 |
| | | | 84 | 4 980 | 1 140 | 284 | 3 200 | 172 | 0,16 \pm 0,014 | 0,019 \pm 0,001 |
| | | | H ₂ O 7 | 4 145 | 915 | 580 | 800 | 192 | 0,92 \pm 0,04 | 0,122 \pm 0,009 |
| | | | 28 | 3 340 | 765 | 455 | 1 600 | 221 | 0,75 \pm 0,054 | 0,095 \pm 0,009 |
| | | | 56 | 2 400 | 587 | 301 | 2 400 | 161 | 0,52 \pm 0,045 | 0,060 \pm 0,007 |
| | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 1 600 | 1 600 | 1,37 | Pb 0 | 3 110 | 1 650 | 1 090 | 1 600 | 452 | 1,0 \pm 0,037 | 0,175 \pm 0,009 |
| | | | 7 | 4 113 | 2 210 | 1 512 | 1 600 | 650 | 1,1 \pm 0,040 | 0,190 \pm 0,008 |
| | | | 28 | 3 020 | 1 560 | 900 | 3 200 | 475 | 0,68 \pm 0,024 | 0,10 \pm 0,006 |
| | | | 56 | 2 160 | 1 180 | 440 | 4 400 | 255 | 0,27 \pm 0,017 | 0,043 \pm 0,003 |
| | | | H ₂ O 7 | 2 585 | 1 390 | 891 | 1 600 | 363 | 0,92 \pm 0,036 | 0,165 \pm 0,007 |
| | | | 28 | 2 465 | 1 330 | 773 | 3 200 | 405 | 0,74 \pm 0,039 | 0,10 \pm 0,007 |
| | | | 56 | 2 112 | 1 100 | 558 | 4 400 | 329 | 0,50 \pm 0,024 | 0,072 \pm 0,003 |
| | | | | | | | | | | |
| 3 200 | 800 | 1,35 | Pb 0 | 4 365 | 7 352 | 2 585 | — | — | 1,0 \pm 0,020 | — |
| | | | 7 | 1 430 | 2 520 | 965 | — | — | 1,1 \pm 0,047 | — |
| | | | 28 | 4 325 | 7 421 | 1 883 | — | — | 0,60 \pm 0,016 | — |
| | | | 56 | 7 287 | 12 510 | 1 795 | — | — | 0,27 \pm 0,006 | — |
| | | | 0 | 5 245 | 8 754 | — | 800 | 1 112 | — | 0,228 \pm 0,008 |
| | | | 7 | 4 015 | 6 373 | — | 800 | 860 | — | 0,252 \pm 0,009 |
| | | | 28 | 11 135 | 17 365 | — | 1 600 | 2 230 | — | 0,116 \pm 0,008 |
| | | | 56 | 5 150 | 7 821 | — | 2 400 | 803 | — | 0,058 \pm 0,002 |

tivamente nelle successive misure la condizione $S_E \Delta_E = \text{costante}$. I valori dei rapporti $(T + E)/T$ nella seconda parte della tabella variano poco al variare di s mostrando così che la condizione $S_E \Delta_E = \text{costante}$ era presso a poco verificata.

I valori ottenuti nelle misure relative agli eventi T , $T + D + D'$ e $T + E + E'$ sono riportati nel seguito.

5. - Lo spettro di densità degli sciamei.

Lo spettro integrale di densità degli sciamei estesi può essere espresso dalla relazione

$$F = K \Delta^{-\gamma},$$

in cui Δ è la densità di particelle (numero di particelle per unità di superficie) nella parte centrale dello sciame, F è la frequenza degli sciamei aventi densità maggiore di Δ , e K e γ si possono ritenere approssimativamente costanti entro un ampio intervallo di densità.

I risultati delle presenti misure permettono di ricavare il valore dell'esponente γ in base alla relazione.

$$\gamma = \frac{d \log T/m}{d \log S},$$

che si ricava dalla precedente espressione dello spettro di densità sostituendo ad F i valori T/m e ricordando che $\bar{\Delta} = I/S$. Il valore medio di γ così ricavato, per densità comprese fra 72 e 3,14 particelle/m² (cioè per superfici S comprese fra 140 e 3200 cm²) risulta: $\gamma = 1,41$ (v. fig. 3). Più in particolare i valori di γ crescono leggermente col decrescere di S e si accordano piuttosto bene con l'espressione di γ :

$$\gamma = 1,31 \pm 0,038 \log_e (1/S),$$

(S in m²) trovata da COCCONI a 260 m s.l.d.m. ⁽³⁾. In base a tale espressione

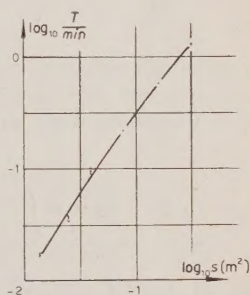


Fig. 3.

I valori di $\log_{10} T/m$, in funzione dei valori di $\log_{10} S$, per la determinazione dell'esponente γ nello spettro di densità.

⁽³⁾ G. COCCONI e V. TONGIORGI COCCONI: *Phys. Rev.*, **75**, 1058 (1949).

i valori di γ corrispondenti ai valori di S presi in considerazione in questo studio risultano:

| S (cm ²) | 140 | 240 | 400 | 800 | 1 600 | 3 200 |
|------------------------|------|------|------|------|-------|-------|
| γ | 1,47 | 1,45 | 1,44 | 1,40 | 1,37 | 1,35 |

Nel seguito verranno adoperati questi valori di γ in corrispondenza dei relativi valori di S .

6. - Interpretazione dei risultati.

Se $F(> \Delta) = K\Delta^{-\gamma}$ è lo spettro integrale di densità degli sciami estesi, la frequenza degli eventi T è espressa dalla relazione

$$T = K \int_0^{\infty} \Delta^{-(\gamma+1)} [1 - \exp(-S\Delta)]^3 d\Delta,$$

e la frequenza degli eventi $T + D$ è espressa dalla relazione:

$$T + D = K \int_0^{\infty} \Delta^{-(\gamma+1)} [1 - \exp(-S\Delta)]^3 \cdot [1 - \exp(-R_D S_D \Delta)] d\Delta,$$

in cui $R_D(s)\Delta = \Delta_D(s)$ = densità di particelle che giungono su D oltrepassando lo spessore s di assorbente.

Analoga relazione vale per $T + E$ se si pone $R_E \Delta = \Delta_E$ ed S_E al posto di S_D ; quanto viene qui detto riguardo alla $T + D$ si può estendere quindi alle $T + E$ cambiando D in E .

Nei due precedenti integrali K , γ ed S sono costanti. Il valore di T risulta pertanto definito, mentre il valore $T + D$ dipende da $R_D S_D$. Ponendo $\alpha = R_D S_D / S$ il valore di $T + D$ dipende dal valore di α e così pure il valore del rapporto $(T + D)/T$. Risulta infatti

$$\frac{T + D}{T} = \frac{-3 + 3 \cdot 2^\gamma - 3^\gamma - \alpha^\gamma + 3(\alpha + 1)^\gamma - 3(\alpha + 2)^\gamma + (\alpha + 3)^\gamma}{-3 + 3 \cdot 2^\gamma - 3^\gamma}$$

Mediante questa espressione di $(T + D)/T$ si possono ottenere delle curve parametriche $(T + D)/T = f(\alpha)$ di parametro γ . Tali curve sono state già de-

terminate per $\gamma = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7$ ⁽⁴⁾ e per $1,45$ ⁽⁵⁾. Esse presentano tutte lo stesso andamento e differiscono poco fra di loro al variare di γ . Utilizzando le curve relative a $\gamma = 1,3; 1,4; 1,45$ e $1,5$ sono state ricavate per interpolazione le curve relative ai valori di γ che ci interessano ($\gamma = 1,47; 1,45; 1,44; 1,40; 1,37; 1,35$). Per mezzo di tali curve sono stati ricavati dai valori sperimentali di $(T + D)/T$ i valori di α , e da questi sono stati dedotti i valori di R_D ; nello stesso modo dai valori sperimentali $(T + E)/T$ sono stati dedotti i valori di R_E . Coi valori di $R_D = R_D(s)$ ed $R_E = R_E(s)$ così ricavati e riportati nelle tabelle I e II, sono state costruite le curve riportate nelle fig. 4 e 5. In queste figure i valori di R_D , relativi ai valori di R per $d = 0$ m, sono indicati con R_0 ed i valori di R_E , relativi ai valori di R per $d = 50$ m, sono indicati con R_{50} ; la scala delle ordinate è a sinistra per R_0 ed a destra per R_{50} . Le curve tratteggiate si riferiscono ai valori di R relativi all'acqua, quelle a tratto continuo si riferiscono ai valori di R relativi al piombo.

7. — Osservazioni sui valori di R_E .

Al crescere di s i valori di R_E ottenuti nel caso $S_E = \text{costante}$ decrescono meno di quelli ottenuti nel caso $S_E \Delta_E = \text{costante}$ (v. fig. 4). Ciò dipende dal fatto che gli eventi $T + E$ risultano dovuti a sciami i cui assi non sono distribuiti uniformemente attorno al centro O di A, B, C , ma sono distribuiti in modo tale che, indicando con r la distanza fra il gruppo E e l'asse dello sciame e con d la distanza OE (fig. 1), in media risulta $d > r$. La differenza $d - r$ cresce col diminuire della probabilità che il gruppo E sia colpito da particelle di sciami rivelati da ABC . Al crescere di s , nel caso $S_E = \text{costante}$, questa probabilità decresce, e quindi la differenza $d - r$ cresce; nel caso $S_E \Delta_E = \text{costante}$, detta probabilità rimane costante e costante rimane pure $d - r$. Ne segue che, in media la distanza r fra il gruppo E e l'asse dello sciame — dalla quale i valori R_E dipendono — nel caso $S_E = \text{costante}$ decresce al crescere di s , mentre nel caso $S_E \Delta_E = \text{costante}$ rimane

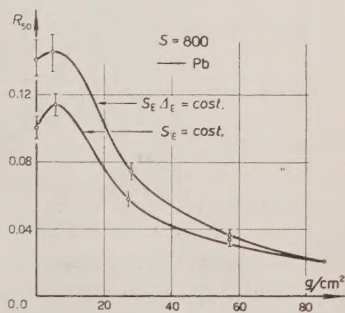


Fig. 4. — I valori di R_{50} nei casi $S_E = \text{cost.}$ ed $S_E \Delta_E = \text{cost.}$ nel caso $S = 800$.

⁽⁴⁾ G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1063 (1949).

⁽⁵⁾ C. MILONE: *Nuovo Cimento*, **8**, 643 (1951).

costante. Per tale ragione nelle successive misure si è cercato di ottenere approssimativamente $S_E \Delta_E = \text{costante}$.

8. - Effetto di transizione ed energia delle particelle.

Sotto piombo (fig. 5) i valori di R presentano un massimo (effetto di transizione); sotto acqua invece hanno un andamento sempre decrescente dato

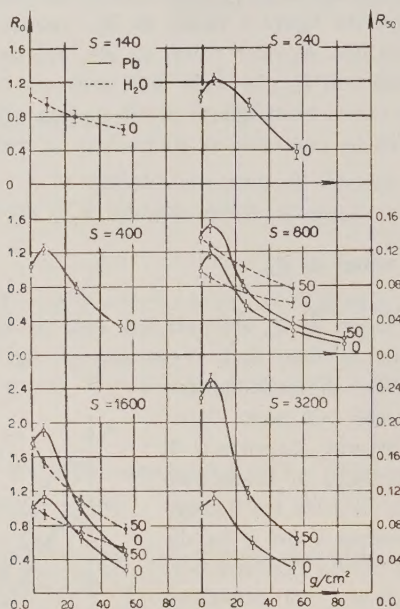


Fig. 5. - I valori di R in funzione di s per vari valori di S .

s = spessore dell'assorbente (piombo od acqua) in g cm^{-2} .

R_0 = $\Delta_D(s)/\Delta$; scala delle ordinate a sinistra.

R_{50} = $\Delta_E(s)/\Delta$; scala delle ordinate a destra.

Δ = densità delle particelle nella parte centrale dello sciame.

$\Delta_D(s)$ = densità delle particelle sotto lo spessore s nella parte centrale dello sciame.

$\Delta_E(s)$ = densità delle particelle sotto lo spessore s a 50 m dai gruppi A , B , C .

che in acqua, come è noto, l'effetto di produzione di elettroni da fotoni è trascurabile rispetto all'effetto di assorbimento. L'andamento delle curve di assorbimento in acqua si può considerare approssimativamente esponenziale ed il coefficiente di assorbimento μ cresce al crescere di S (v. tabella III); ciò indica che lo spettro di energia delle particelle è più duro negli sciame più densi.

Si ha inoltre $\mu (d=0) < \mu (d=50)$, cioè lo spettro di energia in prossimità dell'asse dello sciame è più duro che alla periferia dello sciame.

TABELLA III. - Coefficiente di assorbimento in acqua.

| $S \text{ cm}^2$ | 140 | 800 | 1 600 |
|------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\mu (d=0) \text{ cm}^2/\text{g}$ | $0,0090 \pm 0,0025$ | $0,0114 \pm 0,0016$ | $0,0121 \pm 0,0010$ |
| $\mu (d=50) \text{ cm}^2/\text{g}$ | - | $0,0146 \pm 0,0025$ | $0,0170 \pm 0,0014$ |

9. - Confronto con la teoria a cascata.

La teoria a cascata elettronica in approssimazione A ⁽⁶⁾ fornisce il numero $N = N_A(E_0, E, l)$ di elettroni aventi energia maggiore di E (per $E > E_c$), generati nell'alta atmosfera da un elettrone con energia E_0 e presenti nell'atmosfera alla profondità l ; (l è misurato in unità di lunghezza caratteristica = 36 g cm^{-2} in aria; E_c = energia critica in aria = 89 MeV). In base a tale teoria, adoperando i grafici riportati da JÁNOSSY ⁽⁷⁾ sono stati ricavati in corrispondenza di $l = 33$ (livello del mare) e per vari valori di E_0 , i valori $N(> E)$ riportati nella fig. 6. Come mostra la figura, entro un intervallo piuttosto ampio di energia, si può scrivere $N(> E) = KE^{-\epsilon}$, in cui ϵ cresce col decrescere dell'energia del primario. I valori di ϵ che si ricavano dai grafici sono riportati nella stessa figura accanto ai valori di E_0 a cui si riferiscono.

La determinazione teorica di N è più complicata se si prendono in considerazione anche valori di E inferiori a E_c . In tale caso è necessario tener conto delle perdite di energia per ionizzazione

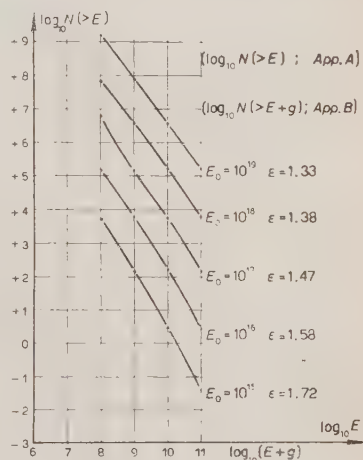


Fig. 6. - Spettro di energia degli elettroni negli sciami generati da un primario di energia E_0 , secondo la teoria a cascata in approssimazione A (per $E > E_c$); in ascisse sono riportati i valori di $\log_{10} E$. Le stesse curve valgono anche per $E < E_c$ se in ascisse si riportano i valori di $\log_{10} (E + g)$.

⁽⁶⁾ B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

⁽⁷⁾ L. JÁNOSSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1950), App. II, pag. 391 e segg.

le quali in approssimazione A vengono trascurate. Una soluzione approssimata si può ottenere sostituendo al termine E un termine $E + g(l, \log E_0/E)$ (⁷), appendice II). Se cioè N_A è la soluzione ottenuta senza tener conto delle perdite di energia per ionizzazione (approssimazione A), ed N_B quella ottenuta tenendo conto di tali perdite si ha: $N_B(E_0, E, l) = N_A(E_0, E + g, l)$ (⁸). I valori di g , per $l \gg I$ sono prossimi ad E_c ; nel caso preso qui in considerazione i valori di g variano da $1,14 E_c$ a $0,85 E_c$ quando E_0/E varia da 10^4 a 10^{10} . Con l'approssimazione $g = E_c$ si ha quindi:

$$(1) \quad N_B(> E) = K(E + E_c)^{-\varepsilon}.$$

Nel seguito verrà fatto un esame dei valori sperimentali per vedere se essi soddisfano ad una relazione del tipo (1); verranno dedotti i relativi valori sperimentali di ε e verrà fatto un confronto di questi valori con quelli dedotti dalla teoria a cascata.

9.1. — Deduzione dei valori di ε dalle curve di assorbimento in acqua. — Prendiamo in esame le curve di assorbimento in acqua supponendo in un primo tempo che la produzione di elettroni in acqua sia trascurabile.

Se, riferendoci ad una generica distanza dall'asse dello sciame, indichiamo con P il rapporto tra la densità delle particelle penetranti e la densità totale di particelle, si ha:

$$\frac{R(s) - P}{R(s=0) - P} = N(> s) = \frac{\text{numero di elettroni che attraversano lo spessore } s}{\text{numero di elettroni che giungono sull'assorbente}}.$$

(⁶) La soluzione in questa forma è stata ottenuta nel 1943 da H. J. BHABHA ed S. K. CHAKRABARTY — B. e C.: *Proc. Roy. Soc.*, A **181**, 246 (1943) —.

Nel 1946 I. TAMM ed S. BELENKY — *Phys. Rev.*, **70**, 660 (1946) — analizzando i risultati di precedenti studi teorici di diversi autori, concludono che lo spettro di energia ricavato da B. e C. non è molto corretto nella regione di bassa energia. In un successivo lavoro B. e C. — *Phys. Rev.*, **74**, 1352 (1948) — rielaborano la loro precedente teoria e giungono ad una soluzione più accurata ma meno semplice di quella ottenuta nel 1943. Nel 1949 H. S. SNYDER — *Phys. Rev.*, **76**, 1563 (1949) — giunge ad una soluzione che concorda con quelle date precedentemente da SNYDER ed altri, e discorda un po' con quella di B. e C. La soluzione di B. e C. è stata infine discussa recentemente da L. JÁNOSSY ed H. MESSEL — *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 1 (1951) —. In questo lavoro gli Autori mettono in evidenza il pregio della teoria di B. e C. quello cioè di fornire una soluzione in forma piuttosto semplice e sufficientemente accurata per gli scopi pratici, suggeriscono un procedimento semplificato che conduce agli stessi risultati di B. e C. del 1948. ed aggiungono infine che per la maggior parte degli scopi pratici una soddisfacente approssimazione della soluzione N_B si può ottenere adoperando la relazione $N_B(E_0, E, l) \approx N_A(E_0, E + g, l)$ con l'ausilio delle tabelle dei valori di N_A e g calcolati dagli stessi Autori (J. e M.) e pubblicati nel 1949 dal Dublin Institute for Advanced Studies (L. JÁNOSSY and H. MESSEL: *Tables of Cascade Functions*. Dublino, 1949). Le stesse tabelle sono riportate in (⁷), appendice II.

Il valore di P è stato determinato da vari Autori; al livello del mare sono stati trovati valori compresi tra 0,02 e 0,03 in prossimità dell'asse dello sciame e valori leggermente più grandi a più grandi distanze dall'asse ⁽⁹⁾ (5). Questi risultati e quelli di alcune misure supplementari, eseguite appunto per determinare il valore di P più adatto al caso in esame, portano a scegliere per P il valore di 0,03 per $d = 0$ m e 0,04 per $d = 50$ m.

Sostituendo questi valori di P nella relazione precedente sono stati ricavati i valori di $N(> s)$. Da questi sono stati dedotti i valori di $N(> E)$ in base ai valori teorici del range degli elettroni in funzione dell'energia rica-

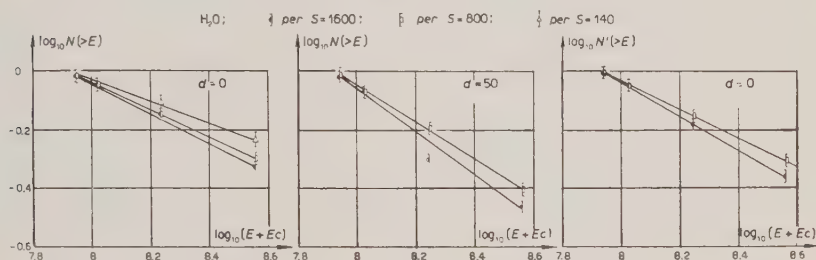


Fig. 7. — Valori di $\log_{10} N(> E)$ e di $\log_{10} N'(> E)$ in funzione dei valori di $\log_{10}(E + E_c)$ per la determinazione di ε . L'assorbente è acqua.

cati dai grafici riportati da CLAY ⁽¹⁰⁾. Secondo tali grafici, il valore dell'energia degli elettroni aventi in acqua un range di 7, 28, 56 g cm⁻² risulta rispettivamente di 16, 80, 240 MeV ⁽¹¹⁾.

Riportando in un diagramma i valori di $\log N(> E)$ ed i corrispondenti valori di $\log(E + E_c)$ sono stati ottenuti i grafici della fig. 7; da tali grafici sono stati ricavati, per i valori di S , i corrispondenti valori di ε in base alla espressione $\varepsilon = -d \log N(> E) / d \log(E + E_c)$ che si deduce dalla precedente relazione (1). I valori di ε così ricavati sono riportati in funzione di S nella tabella IV; in essa sono indicati con ε_0 i valori relativi a $d = 0$, con ε_{50} i valori relativi a $d = 50$ m.

⁽⁹⁾ G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

⁽¹⁰⁾ J. CLAY: *Physica*, **14**, 499 (1948).

⁽¹¹⁾ Le misure sperimentali di J. S. LAUGHLIN ed J. W. BEATTIE: *Phys. Rev.*, **83**, 692 (1951) — relative ad elettroni con energie fino a 22 MeV —, danno un range di 7 g/cm² per elettroni di 14 MeV e di 11 g/cm² per elettroni di 22 MeV. I valori teorici di CLAY non discordano con questi valori sperimentali.

TABELLA IV. — Valori di ε ricavati dalle curve di assorbimento in acqua.

| S | 140 | 800 | 1 600 |
|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ε_0 | $0,38 \pm 0,17$ | $0,50 \pm 0,12$ | $0,52 \pm 0,10$ |
| ε_{50} | — | $0,62 \pm 0,16$ | $0,67 \pm 0,07$ |

In un lavoro di MILLAR ⁽¹²⁾, sull'effetto di transizione degli sciami estesi al livello del mare, è determinata la frequenza degli eventi $A + B + C$ fra tre gruppi di contatori A , B , C di 750 cm^2 di superficie ciascuno, al variare dello spessore s dell'assorbente che copre ciascun gruppo di contatori, ed in base ai valori delle frequenze degli eventi $A + B + C$ per $s = 0$ e 22 g/cm^2 di H_2O , e per $s = 26$ e 52 g/cm^2 di C è ricavato per ε il valore $0,6 \pm 0,06$. Questo valore sia per l'intervallo di energia preso in considerazione, sia per il metodo di misura, è confrontabile col valore di ε per $S = 800$ della tab. IV ed in buon accordo con tale valore. La tab. IV mostra che i valori di ε risultano inferiori ai valori calcolati in base alla teoria a cascata per E_0 compreso fra 10^{19} e 10^{15} eV . Una ulteriore discussione sui valori di ε sarà fatta dopo aver esaminato i risultati delle misure eseguite con assorbenti di piombo.

9.2. — Produzione di elettroni in acqua. Correzioni ai precedenti valori di ε .

Si è finora ritenuto trascurabile l'effetto di produzione di elettroni in acqua. Al fine di valutare l'entità di tale produzione e di togliere nella valutazione di R quelle particelle che arrivano nell'assorbente come particelle non ionizzanti e l'oltrepassano come ionizzanti, sono state eseguite le misure del tipo $T + D$ e $T + D + D'$. I risultati delle misure sono riassunti nella tab. V.

TABELLA V.

| $S = S_D$ | $S_{D'}$ | Schermo (g/cm^2) | $T + D + D'$ | $\frac{T + D + D'}{T + D}$ | $R'_D = (R_{D+D'})_{\text{norm}}$ |
|-----------|----------|--------------------------------|--------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 800 | 6 000 | H_2O 0 | 356 | 0,99 | $1,0 \pm 0,05$ |
| » | » | 7 | 430 | 0,99 | $0,9 \pm 0,05$ |
| » | » | 28 | 308 | 0,987 | $0,73 \pm 0,05$ |
| » | » | 56 | 325 | 0,982 | $0,50 \pm 0,04$ |
| 1 600 | 6 000 | H_2O 0 | 521 | 0,945 | $1,0 \pm 0,05$ |
| » | » | 7 | 328 | 0,94 | $0,90 \pm 0,05$ |
| » | » | 28 | 596 | 0,92 | $0,68 \pm 0,04$ |
| » | » | 56 | 550 | 0,91 | $0,47 \pm 0,03$ |

(12) D. D. MILLAR: *Nuovo Cimento*, **8**, 279 (1951).

I valori $T - D - D'$ sono stati normalizzati rispetto ai valori $T - D$ ponendo, per $s = 0$, $(T - D - D')_0 = T - D$. Dai valori $(T - D - D')_s / T$ sono stati ricavati i valori R_{T-D} normalizzati, indicati genericamente con R_s e riportati nella tab. V. Al crescere di s i valori di R decrescono un po' più rapidamente dei valori di R mettendo in evidenza un debole effetto di produzione di elettroni. Con procedimento analogo a quello del n. 9^o1, dai valori di R' sono stati dedotti i valori di N e, da questi, i valori di ε . Essi risultano rispettivamente $\varepsilon = 0,52 \pm 0,16$ per $S = 800$ ed $\varepsilon = 0,57 \pm 0,12$ per $S = 1600$, eguali, entro gli errori, a quelli riportati nella tab. IV.

L'effetto della produzione di elettroni è messo pure in evidenza dall'andamento dei rapporti $(T - D - D') / (T - D)$ al crescere di s (tab. V). Nel caso $S = 800$ esso sembra meno evidente che nel caso $S = 1600$. Ciò dipende dal valore troppo elevato del rapporto $S_E / S_D = 6000/800$ che maschera parzialmente l'effetto, dato che mentre D è colpito da elettroni generati da fotoni negli schermi, D' può venire colpito da altri elettroni dello sciame. D'altra parte adoperando come assorbente l'acqua, non si può fare $S_E \ll S_D$ (62, 1 cm). Per tale ragione non si è ritenuto opportuno insistere su queste misure, mentre le misure dello stesso tipo eseguite con assorbente di piombo permettono di ricavare i valori di $N \sim E_0$ in un intervallo più esteso di energia adoperando rapporti $S_{D'}/S_D$ più piccoli.

9^o3. - *Misure con assorbenti di piombo.* - Misure del tipo T , $T - D$, $T - D - D'$, $T - E$ e $T - E - E$ sono state eseguite con assorbenti di piombo. I risultati sono riuniti nella tab. VI.

Per $S = 240$ il rapporto S_E / S_D è piuttosto elevato ($S_E / S_D = 5$) e l'andamento della curva R vs. (fig. 8), che si deduce dai valori $(T - D - D') / T$

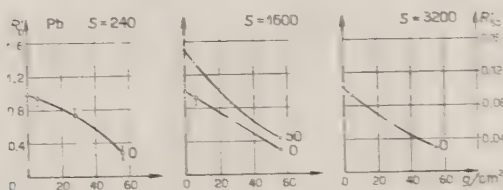


Fig. 8. - Valori di $R(s)$ per vari valori di S . L'assorbente è piombo.

mostra che l'effetto di produzione di elettroni da fotoni (effetto $\gamma \rightarrow e$) viene eliminato solo parzialmente.

Per $S = 1600$ il rapporto S_E / S_D è più basso ($S_E / S_D = 2,75$), tuttavia per $s = 0$ risultava $T - D - D' = T - D$. Ancora più bassi erano i rapporti S_E / S_D , e per $s = 0$ risultava $T - E - E < T - E$. Ai valori $T - E - E$ è stata applicata la condizione di normalizzazione $(T - E - E)_0 = T - E$ per $s = 0$.

TABELLA VI.

| S | Schermo g/cm ² | m | T | S_D | $S_{D'}$ | $T + D + D'$ | $\frac{T + D + D'}{T + D}$ | $R'_D - R_{(D+D'),n}$ |
|-------|------------------------------|--------|--------|-------|----------|--------------|----------------------------|-----------------------|
| 240 | Pb 0 | 6 200 | 235 | 240 | 1 200 | 135 | — | 1,0 \pm 0,13 |
| " | 7 | " | " | " | " | 150 | — | 0,95 \pm 0,12 |
| " | 28 | " | " | " | " | 138 | — | 0,75 \pm 0,08 |
| " | 56 | " | " | " | " | 84 | — | 0,31 \pm 0,04 |
| 1 600 | Pb 0 | 1 575 | 900 | 1 600 | 4 400 | 590 | 1,0 | 1,00 \pm 0,04 |
| " | 7 | 3 330 | 2 080 | " | " | 1 320 | 0,92 | 0,92 \pm 0,03 |
| " | 28 | 1 405 | 815 | " | " | 448 | 0,945 | 0,66 \pm 0,04 |
| " | 56 | 1 590 | 910 | " | " | 326 | 0,99 | 0,26 \pm 0,02 |
| 3 200 | Pb 0 | 4 365 | 7 352 | 800 | 1 200 | 2 105 | 0,812 | 1,00 \pm 0,02 |
| " | 7 | 1 430 | 2 520 | " | " | 669 | 0,690 | 0,92 \pm 0,035 |
| " | 28 | 4 325 | 7 421 | " | " | 1 477 | 0,785 | 0,59 \pm 0,016 |
| " | 56 | 7 287 | 12 510 | " | " | 1 438 | 0,795 | 0,26 \pm 0,006 |
| S | Schermo g/cm ² | m | T | S_E | $S_{E'}$ | $T + E + E'$ | $\frac{T + E + E'}{T + E}$ | $R'_E = R_{(E+E'),n}$ |
| 1 600 | Pb 0 | 14 225 | 8 844 | 800 | 1 200 | 1 014 | 0,744 | 0,150 \pm 0,0026 |
| " | 7 | 8 520 | 5 533 | " | " | 583 | 0,618 | 0,134 \pm 0,0040 |
| " | 0 | 8 445 | 5 349 | 1 200 | 2 000 | 796 | 0,75 | 0,140 \pm 0,0052 |
| " | 28 | 16 650 | 10 466 | " | " | 1 075 | 0,738 | 0,084 \pm 0,0016 |
| " | 0 | 8 675 | 5 626 | 1 600 | 2 000 | 1 083 | 0,764 | 0,148 \pm 0,006 |
| " | 56 | 17 880 | 11 331 | " | " | 802 | 0,77 | 0,039 \pm 0,0018 |

Per $S = 3\,200$ era $S_{D'}/S_D = 1,5$ e per $s = 0$ risultava $T + D + D' < T + D$. Anche a questi valori è stata applicata la condizione di normalizzazione $(T + D + D')_n = T + D$ per $s = 0$.

Dai valori di $(T + D + D')_n$ e $(T + E + E')_n$ sono stati dedotti i valori di R' riportati nella tab. VI e nei grafici della fig. 8.

Da un confronto dei valori di $R(s)$ coi valori di $R'(s)$ risulta che l'effetto $f \rightarrow e$ si può ritenere almeno in buona parte eliminato. Esso è molto elevato

TABELLA VII. — Valori di ε ricavati dai valori di R' relativi al piombo.

| S (cm ²) | 240 | 1 600 | 3 200 |
|------------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| ε_0 | 0,45 \pm 0,09 | 0,53 \pm 0,04 | 0,53 \pm 0,03 |
| ε_{50} | — | 0,58 \pm 0,008 | — |

intorno ad $s = 7 \text{ g/cm}^2$ e decresce poi col crescere di s divenendo piccolo per $s = 56 \text{ g/cm}^2$. Alla stessa conclusione si giunge osservando l'andamento dei rapporti $(T + D + D')/(T + D)$ e $(T + E + E')/(T + E)$ al crescere di s .

Dai valori $R'(s)$ sono stati ricavati i valori di $N'(>E)$ in base ai grafici range-energia di CLAY⁽¹⁰⁾, secondo i quali l'energia degli elettroni aventi in piombo un range di 7; 28, 56 g/cm^2 risulta rispettivamente di 10; 100; 1000 MeV. Riportando in un diagramma i valori di $\log_{10} N'(>E)$ e di $\log_{10}(E + E_c)$ sono stati ottenuti dei grafici, dai quali si deducono i valori di ε riportati nella tab. VII. I grafici, per $d = 0$, sono riportati nella fig. 9.

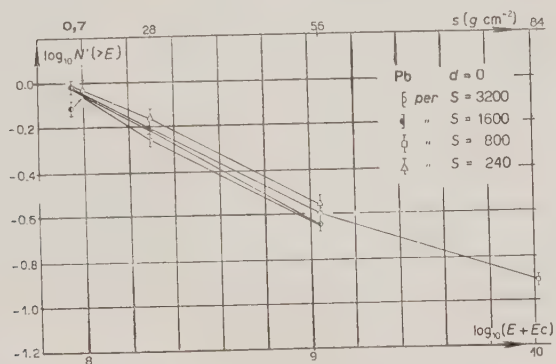


Fig. 9. - Valori di $\log_{10} N'(>E)$ in funzione di $\log_{10}(E + E_c)$ per la determinazione di ε . L'assorbente è piombo.

9.4. - Osservazione. - Si è osservato precedentemente che le misure del tipo $T + D + D'$ (oppure $T + E + E'$) non eliminano completamente l'effetto $f \rightarrow e$: gli eventi in cui D' è colpito da un elettrone che non raggiunge D , e D è colpito da elettroni originati da fotoni (eventi $eD' + (f \rightarrow e)D$) portano ad un computo in eccesso degli elettroni con elevata energia. Dato però che la densità dei fotoni negli sciami è paragonabile a quella degli elettroni, si può riconoscere che il rapporto

$$\frac{\text{probabilità che si verifichi un evento } eD' + (f \rightarrow e)D}{\text{probabilità che si verifichi un evento } (f \rightarrow e)D} < 1,$$

decresce rapidamente col decrescere di S_D/A . Osserviamo che per $S = 1600$ si ha $S_D/A = S_D'/S = 2,75$ ed $S_D'/S_D = 2,75$, mentre per $S = 3200$ si ha $S_D/A = S_D'/S = 0,37$ ed $S_D'/S_D = 1,5$. Ne segue che se nel precedente rapporto il numeratore avesse un peso rilevante nei risultati delle misure, le differenze $R - R'$ nel caso $S = 3200$ dovrebbero essere notevolmente maggiori delle stesse differenze nel caso $S = 1600$. Invece per $s = 56$ non si notano

grosse differenze fra R ed R' nè per $S = 1600$ nè per $S = 3200$. Inoltre nel caso $S = 1600$ per $d = 50$ m l'effetto $f \rightarrow e$ ha minor peso che per $d = 0$ sia sugli eventi $(f \rightarrow e)E$, sia sugli eventi $eE' + (f \rightarrow e)E$. Infatti, oltre ad essere $S_E/\Delta_E \leq 0,2$ si ha che la densità dei fotoni è minore di quella degli elettroni dato che negli sciami la deflessione angolare dei fotoni è minore di quella degli elettroni della stessa energia ⁽¹³⁾. Ma anche in questo caso, per $s = 56$ non si notano grosse differenze fra R ed R' . Si può perciò concludere che non vengono commessi grossi errori prendendo come buoni i valori di R' .

9.5. - *Altri valori di ε dedotti dalle misure con assorbenti di piombo.* - Tenendo presenti le relazioni $R' = R$ per $s = 0$ ed $R' \leq R$ per $s = 56$, ed osservando che al variare di S le varie curve $R(s)$ hanno fra loro lo stesso andamento e che altrettanto si può dire per le $R'(s)$, note le $R(s)$ si possono dedurre per interpolazione le $R'(s)$ nei casi in cui non sono state determinate direttamente, cioè per $S = 400$ ($d = 0$); $S = 800$ ($d = 0$, fino ad $s = 84$ e $d = 50$); $S = 3200$ ($d = 50$). Con queste approssimazioni la tabella dei valori di ε può essere completata come indica la tab. VIII. In essa sono riassunti i valori di ε ricavati dalla teoria a cascata per $l = 33$ (livello del mare) in corrispondenza ai vari valori di E_0 , ed i valori sperimentali di ε ricavati dalle curve di assorbimento in acqua ed in piombo.

TABELLA VIII. - *Riassunto dei valori di ε .*

| a) Ricavati dalla teoria a cascata per vari valori di E_0 ; e per $l = 33$: | | | | | | |
|--|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| E_0 (eV) | 10^{19} | 10^{18} | 10^{17} | 10^{16} | 10^{15} | |
| ε | 1,33 | 1,38 | 1,47 | 1,58 | 1,72 | |

| b) Ricavati sperimentalmente dalle curve di assorbimento: | | | | | | | |
|---|--------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| Assorbente | S | 140 | 240 | 400 | 800 | 1 600 | 3 200 |
| H ₂ O | ε_0 | $0,38 \pm 0,17$ | — | — | $0,50 \pm 0,12$ | $0,52 \pm 0,10$ | — |
| | ε_{50} | — | — | — | $0,62 \pm 0,16$ | $0,67 \pm 0,07$ | — |
| Pb | ε_0 | — | $0,45 \pm 0,09$ | $0,47 \pm 0,08$ | $0,49 \pm 0,04$ | $0,53 \pm 0,04$ | $0,53 \pm 0,03$ |
| | ε_{50} | — | — | — | $0,59 \pm 0,06$ | $0,58 \pm 0,008$ | $0,59 \pm 0,012$ |

⁽¹³⁾ V. per esempio, A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, 7, 638 (1950).

10. - Discussione.

10.1. - I risultati delle misure mostrano che nell'intervallo di energia preso in considerazione gli elettroni degli sciami soddisfano approssimativamente ad uno spettro di energia del tipo

$$(1) \quad N = K(E + E_c)^{-\varepsilon}.$$

I valori sperimentali di ε risultano però inferiori a quelli che la teoria a cascata elettrofotonica lascia prevedere. Infatti se gli sciami registrati fossero prodotti al limite dell'atmosfera da un elettrone o fotone primario con energia di $10^{16} \div 10^{15}$ eV (energia necessaria per generare al livello del mare gli sciami rivelati dai nostri gruppi A, B, C), i valori di ε in prossimità dell'asse dello sciamo dovrebbero essere di $1,6 \div 1,7$, mentre sperimentalmente si trova $0,5 \div 0,6$ (v. tab. VIII). Il disaccordo risulta ancora più netto, come si vedrà avanti, per gli elettroni che si trovano a grande distanza dall'asse dello sciamo.

Non sembra che questo disaccordo possa dipendere da errori sperimentali o da errori nelle curve range-energia adoperate. Infatti nel primo caso quando s varia da 0 a 56 g cm² di piombo i valori di R' dovrebbero variare da 1 a circa 0,05 anziché da 1 a circa 0,25 come è stato trovato sperimentalmente, ma errori sperimentali così elevati sono da escludere. Nel secondo caso l'energia degli elettroni che hanno in piombo un range di 5 cm dovrebbe essere dell'ordine di 10^8 anziché di 10^9 eV, ma errori così elevati nelle curve range-energia sono da escludersi dato che fino ad energie dell'ordine di 10^7 eV i valori teorici sono in accordo coi dati sperimentali ⁽¹¹⁾.

La stessa differenza tra i valori sperimentali di ε e quelli che si deducono dalla teoria a cascata elettronica si nota nei risultati di MITRA e ROSSER ⁽¹⁴⁾, i quali mediante misure in camera di Wilson trovano $\varepsilon = 1,1 \pm 0,3$, e di MILLAR ⁽¹²⁾, il quale mediante misure con contatori trova $\varepsilon = 0,6 \pm 0,06$. I valori sperimentali di ε sono quindi in disaccordo con quelli che si ricavano dalla teoria a cascata. Vedremo come questo disaccordo si possa eliminare ammettendo che allo sviluppo degli sciami contribuisca una componente meno assorbita degli elettroni, quale può essere la componente N , capace di produrre durante lo sviluppo dello sciamo altra componente N ed elettroni.

10.2. - *Spettro di energia in prossimità dell'asse.* - Se sciami di elettroni venissero prodotti oltre che nell'alta atmosfera anche a quote più basse, i valori teorici di ε risulterebbero più bassi. Per esempio, per sciami prodotti alla quota di $l = 10$ oppure di $l = 5$ lunghezze di radiazione sopra il luogo

⁽¹⁴⁾ S. M. MITRA e W. G. V. ROSSER: *Proc. Phys. Soc.*, A, **62**, 364 (1949).

in cui vengono rivelati, i valori teorici di ε in corrispondenza di vari valori dell'energia iniziale E_0 e per E compreso fra 10^8 e 10^{11} eV risultano:

| E_0 | 10^{17} | 10^{16} | 10^{15} | 10^{14} | 10^{13} |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| ε ($l = 10$) | 0,7 | 0,76 | 0,86 | 0,96 | 1,2 |
| ε ($l = 5$) | 0,4 | 0,43 | 0,46 | 0,6 | 0,73 |

Per un confronto con questi valori, i precedenti valori sperimentali di ε devono essere corretti perchè, non essendo $l \gg 1$, non è più lecito porre $g(l, \log_{10} E_0/E) = E_c$. Quando E_0/E varia da 10^{10} a 10^4 i valori di g variano da $0,60 E_c$ a $0,89 E_c$ per $l = 10$, e da $0,45 E_c$ a $0,69 E_c$ per $l = 5$; ponendo $g(10, \log_{10} E_0/E) = 0,75 E_c$ e $g(5, \log_{10} E_0/E) = 0,57 E_c$, i valori sperimentali di ε si possono ottenere moltiplicando quelli ottenuti per $l = 33$ (tab. VIII, *b*) per un fattore 0,93 nel caso $l = 10$, e per un fattore 0,88 nel caso $l = 5$. I valori sperimentali di ε risulterebbero così più vicini ai valori teorici che non nel caso di sciami prodotti esclusivamente al limite dell'atmosfera.

Ad una conclusione presso che analoga, che cioè gli sciami non siano prodotti esclusivamente nell'alta atmosfera, giungono AMALDI, CASTAGNOLI, GIGLI e SCIUTI⁽¹⁵⁾ osservando che per interpretare una parte delle loro misure si deve ammettere che il numero degli sciami che a 3500 m s.l.d.m. ($l = 18,7$) non hanno ancora raggiunto il massimo sviluppo è molto maggiore di quello che si calcola supponendo che la radiazione primaria responsabile degli sciami sia assorbita con un cammino libero medio di poche decine di g cm^{-2} . Nel nostro caso le ipotesi sarebbero più restrittive: gli sciami registrati dovrebbero essere stati prodotti non molte lunghezze di radiazione sopra il sistema che li rivela.

Queste ipotesi renderebbero i valori teorici di ε più prossimi ai valori sperimentali. Però anche il caso di sciami puramente elettronici, sia pure prodotti negli strati più bassi dell'atmosfera è da escludere: questi sciami infatti avrebbero maggior probabilità di essere registrati quando sono vicini al massimo dello sviluppo, e l'esponente ε non risulterebbe molto inferiore di quello di uno sciame elettronico generato al limite dell'atmosfera. Se invece prende parte allo sviluppo dello sciame una componente N , capace di svilupparsi a cascata e di produrre elettroni, gli esponenti trovati nello spettro sperimentale di energia si possono spiegare. Questa parte è discussa più ampiamente nel successivo n. 10³.

⁽¹⁵⁾ E. AMALDI, G. CASTAGNOLI, A. GIGLI e S. SCIUTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 401 (1950); **7**, 816 (1950).

10.3. - Lo spettro per $d = 50$ m. - Per $d = 50$ m lo spettro di energia sperimentale risulta più molle che per $d = 0$, tuttavia molto più duro di quello teorico; si trovano inoltre a quella distanza degli elettroni con energia così elevata che la loro presenza non si può spiegare con la teoria a cascata elettronica.

Come è noto, secondo tale teoria, l'estensione laterale di uno sciame è dovuta agli urti coulombiani i quali allontanano dall'asse gli elettroni con bassa energia; ne segue che elettroni con energia molto elevata non si possono trovare molto distanti dall'asse dello sciame. Indicando con r la distanza degli elettroni dall'asse dello sciame e con E la massima energia degli elettroni a quella distanza, fra r ed E esiste la seguente relazione:

$$r = \frac{0,245}{E},$$

in cui r è misurato in unità di lunghezza di radiazione $l_0 = 36$ g/cm², ed E è misurato in unità di energia critica $E_c = 86$ MeV ⁽¹⁵⁾.

Per $E = 10^9$ eV risulta $r = 0,022 \cdot l_0 = 6$ m (al livello del mare 36 g/cm² corrispondono a 280 m di aria); cioè in uno sciame a cascata elettronica, al di là di 6 m dall'asse non si possono trovare elettroni con energia superiore a 10^9 eV. Ciò è in disaccordo con i risultati sperimentali, secondo i quali per $d = 50$ m il 25% degli elettroni che si trovano a quella distanza ha energia superiore a 10^9 eV.

Per interpretare questo risultato sperimentale avanziamo l'ipotesi che la componente N che fa parte degli sciami subisca nell'atmosfera un processo di moltiplicazione e contribuisca allo sviluppo dello sciame generando elettroni non solo lungo l'asse, ma anche fuori dall'asse dello sciame. Questa ipotesi non è restrittiva; anzi è stato trovato sperimentalmente ⁽¹⁶⁾ che la componente N (protoni, neutroni, mesoni π) che si trova associata agli sciami estesi decresce in numero col crescere della distanza dall'asse dello sciame presso a poco come la componente elettronica, per cui la componente N si può ritenere prodotta negli sciami con un processo qualitativamente simile a quello degli elettroni. Inoltre è stato mostrato ⁽¹⁷⁾ che basta ammettere che la produzione di componente N nella parte centrale dello sciame non decresca rapidamente col crescere della quota s.l.d.m., (di modo che la produzione a bassa quota non sia trascurabile rispetto alla produzione ad alta quota), perchè la distribuzione laterale (teorica) della componente N risulti simile a quella degli elettroni. Infine le fotografie in camera di Wilson ottenute da BRANCH a 3260 m s.l.d.m. ⁽¹⁸⁾ mostrano l'esistenza di particelle di natura nucleonica

⁽¹⁵⁾ G. COCCONI e V. TONGIORGI COCCONI: *Phys. Rev.*, **79**, 730 (1950).

⁽¹⁷⁾ K. GREISEN, W. D. WALKER ed S. P. WALKER: *Phys. Rev.*, **80**, 535 (1950).

⁽¹⁸⁾ G. M. BRANCH: *Phys. Rev.*, **84**, 147 (1951).

fortemente interagenti e di cascate nucleari che contribuiscono allo sviluppo della cascata elettronica.

Amnesso che la componente N contribuisca allo sviluppo dello sciame e lo alimenti durante il suo sviluppo, si può spiegare sia la presenza degli elettroni con elevata energia a grande distanza dall'asse dello sciame, i quali possono essere generati dalla componente N anche fuori dall'asse, sia lo spettro di energia della componente elettronica che, come si è visto, risulta molto più duro di quanto lascia prevedere la teoria della cascata elettronica.

10.4. — *Dipendenza di ε da S .* — In uno sciame a cascata elettronica il valore di ε dipende sia dall'energia E_0 della particella che ha prodotto lo sciame, sia dalla distanza l del luogo di produzione dal luogo di rivelazione: $\varepsilon = f(E_0, l)$. Dalla teoria degli sciami, per $l = \text{costante}$ si ricava:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial E_0}\right) > 0; \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial E_0}\right) < 0.$$

Tenendo presente che $\Delta = I/S$, dalle due precedenti relazioni si deduce:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial S}\right) > 0.$$

Cioè si ha un aumento di ε con l'aumentare di S ; esso dipende dall'aumento con S negli sciami registrati, della percentuale di sciami prodotti da particelle meno energetiche.

Una analoga dipendenza dei valori di ε dai valori di S può esistere anche se una componente N prende parte allo sviluppo dello sciame. Si può così interpretare anche l'aumento di ε col crescere di S che si trova sperimentalmente (tab. VIII).

11. — Conclusione.

Lo spettro di energia degli elettroni negli sciami soddisfa approssimativamente alla relazione

$$N(> E) = K(E + E_c)^{-\varepsilon}.$$

I valori di ε crescono col crescere di S e col crescere della distanza degli elettroni dall'asse dello sciame mantenendosi però inferiori ai valori che si deducono dalla teoria a cascata elettronica. Cioè lo spettro sperimentale risulta più duro di quello previsto dalla predetta teoria. Inoltre sono presenti a grande distanza dall'asse dello sciame elettroni con energia troppo elevata per rien-

trare nello schema della cascata elettronica iniziata al limite dell'atmosfera da un singolo elettrone.

Il disaccordo si elimina ammettendo che gli elettroni negli sciami siano prodotti anche da parte di una componente meno assorbita degli elettroni, come la componente N , la quale subisce in aria un processo di moltiplicazione e contribuisce allo sviluppo dello sciame.

La presenza di nucleoni e mesoni negli sciami estesi ha fatto pensare già da diversi anni che gli sciami non possono essere dovuti ad una semplice cascata di elettroni e fotoni, però tutte le esperienze eseguite fino ad oggi sulla componente elettronica erano in discreto accordo con la teoria a cascata elettronica e la componente nucleonica assumeva un'importanza secondaria, anche perchè costituisce solo una piccola percentuale del numero totale di particelle.

I risultati della presente misura mostrano, invece, che la teoria a cascata elettronica non è in grado di interpretare lo spettro di energia della stessa componente elettronica, mentre la componente nucleonica acquista maggiore importanza perchè questa componente alimenta lo sciame e contribuisce al suo sviluppo.

Ringrazio il prof. GIUSEPPE COCCONI per i consigli datimi ed il prof. CONCETTO BELLIA per avere destinato una parte dei fondi dell'Istituto all'acquisto del materiale necessario per realizzare il dispositivo sperimentale.

SUMMARY

The energy spectrum of extensive cosmic-ray showers has been studied at sea level by means of G.M. counters, at two distances d ($d = 0$ and $d = 50$ m) from the core of the showers. Showers were successively selected having, near the core, average density $\Delta = 72; 42; 25; 12.5; 6.25; 3.14$ particles/m². The results show that the energy spectrum of the electrons in the showers can be expressed by the relation $N = K(E + E_c)^{-\epsilon}$, where N is the number of the electrons with energy greater than E , E_c is the critical energy in air, and ϵ is an exponent which depends on Δ and on the distance of the electrons from the core. The experimental values of ϵ are lower than the ones predicted by the cascade theory; furthermore at $d = 50$ m electrons have been found with energies too high to be explained on the basis of an electronic cascade initiated in the high atmosphere by a single electron. The disagreement can be eliminated if one supposes that in the extensive showers electrons are produced also by a component, say the N component, which is absorbed in air less than the electrons and contributes to the shower development throughout the atmosphere.

Sulla componente nucleonica nell'atmosfera (II).

E. CLEMENTEL e F. FERRARI

Istituto di Fisica dell'Università - Padova

(ricevuto il 30 Aprile 1952)

Riassunto. — Vengono dati gli spettri delle componenti protonica e neutronica fra 400 e 2200 MeV per le tre quote di 1033, 680 e 310 g·cm⁻². Sono discussi separatamente i contributi che provengono dai processi radiativi e da quelli non radiativi. Come sorgente primaria dei protoni si è usato lo spettro di Winckler. Sia le perdite di energia per ionizzazione che quelle per frenamento in materia nucleare sono state assunte costanti. Il confronto con gli spettri sperimentali dei protoni è soddisfacente ed anche i dati sull'effetto di latitudine sono in accordo con i risultati ottenuti. Nell'andamento del rapporto protoni-neutroni si è distinto il rapporto che si riferisce ai secondari di ambedue le componenti, rapporto lentamente variabile con la quota e che tende all'unità col crescere dell'energia, dal rapporto effettivo, che per i protoni tiene conto anche del residuo primario e cresce quindi rapidamente nell'alta atmosfera, mentre non differisce praticamente dal precedente nella media e bassa atmosfera.

Introduzione.

In un precedente lavoro ⁽¹⁾ il problema della diffusione della componente nucleonica nell'atmosfera è stato trattato separando i protoni dai neutroni, che ubbidiscono a due equazioni di diffusione distinte. In tali equazioni è stato tenuto conto sia dei processi anelastici o radiativi, dove le perdite di energia sono dovute alla generazione di mesoni, sia della perdita di energia per ionizzazione per i protoni e dei cosiddetti processi elastici, dove le perdite di energia sono dovute a puro frenamento in materia nucleare, per effetto degli urti che un nucleone subisce nell'attraversamento di un nucleo. I termini relativi a

⁽¹⁾ E. CLEMENTEL e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **8**, 936 (1951). Questo lavoro verrà citato in seguito quale (I).

tali processi contengono esplicitamente sia la probabilità di scambio di stato di carica, sia la probabilità che il processo sia elastico, espressa quest'ultima, da una funzione dell'energia ricavata dalla teoria di FERMI⁽²⁾ sulla produzione dei mesoni. La validità delle equazioni di diffusione è limitata verso le basse energie, dove non è più lecito ignorare la diffusione angolare; sotto i 300-400 MeV i risultati di una trattazione unidimensionale hanno certo un valore puramente indicativo⁽³⁾.

L'aver separato nelle equazioni di diffusione il contributo elastico da quello anelastico comporta due tipi di equazioni. Il primo tipo, che è quello discusso in (I), descrive la componente nucleonica secondaria che proviene dagli urti anelastici tramite una funzione sorgente, distribuita lungo l'atmosfera con una dipendenza esponenziale che corrisponde ad un cammino di assorbimento di $125 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, e con una dipendenza energetica che rende lo spettro differenziale del gruppo di Bristol⁽⁴⁾ dei protoni prodotti negli eventi nucleari.

Il secondo tipo di equazione di diffusione descrive la componente secondaria che proviene dagli urti elastici, ed è formalmente analogo al precedente salvo la sostituzione della funzione sorgente con le condizioni iniziali al limite dell'atmosfera, dove lo spettro dei protoni deve ridursi allo spettro primario di Winckler.

Quanto al frenamento in materia nucleare, delle due alternative perdite variabili con l'energia (cfr. I, 3) o perdite costanti, quest'ultima ha dato per i neutroni dei cammini di assorbimento in migliore accordo con i risultati sperimentali, per cui anche in questa nota useremo il valore di 80 MeV quale perdita media di un nucleone nell'attraversamento di un nucleo d'aria.

Mentre in (I) ci si è limitati a dare l'approssimazione zero per i soli neutroni e per la bassa atmosfera, trascurando il contributo elastico derivante dallo spettro di Winckler, qui daremo le soluzioni complete di prima approssimazione sia per i neutroni che per i protoni, il che ci consentirà un più completo confronto sperimentale per quanto riguarda l'intensità verticale delle due componenti in funzione della quota e dell'energia.

1. - Componenti secondarie dei processi radiativi.

Per brevità adotteremo lo stesso formalismo della nota (I), alla quale pertanto rimandiamo per il significato delle notazioni usate.

Gli spettri differenziali $N(E, t)$ e $P(E, t)$ rispettivamente dei neutroni e dei

⁽²⁾ E. FERMI: *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 570 (1950); *Phys. Rev.*, **81**, 683 (1951).

⁽³⁾ Il problema della diffusione angolare della nucleonica è trattato in un lavoro in corso di pubblicazione sulla *Phys. Rev.*, da H. MESSEL e H. S. GREEN. Ringraziamo il Dr. MESSEL per averci fatto avere il manoscritto.

⁽⁴⁾ U. CAMERINI, P. H. FOWLER, W. O. LOCK e H. MUIRHEAD: *Phil. Mag.*, **41**, 413 (1950).

protoni a quota t soddisfano il sistema di equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial N(E, t)}{\partial t} = -\frac{N(E, t)}{\Lambda} + \frac{1-q}{\Lambda} N(E+\eta, t) + \frac{\bar{q}}{\Lambda} P(E+\eta, t) + \frac{S(E, t)}{\Lambda} \\ \frac{\partial P(E, t)}{\partial t} = \frac{\partial[\beta(E)P(E, t)]}{\partial E} - \frac{P(E, t)}{\Lambda} + \frac{1-q}{\Lambda} P(E+\eta, t) + \\ + \frac{\bar{q}}{\Lambda} N(E+\eta, t) + \frac{S(E, t)}{\Lambda} \end{cases}$$

Poichè con l'energia cinetica $E - M$ dei nucleoni non scenderemo sotto i 400 MeV, è lecito intanto approssimare le perdite di energia per ionizzazione dei protoni $\beta(E)$ col valore costante β_0 relativo al minimo della curva di ionizzazione. Ricordiamo che \bar{q} e $1-q$ sono funzioni dell'energia tramite la funzione di Fermi (cfr. I, 6 e 10). Supposte allora note le quantità $N(E+\eta, t)$ e $P(E+\eta, t)$, le soluzioni della (1) si scrivono semplicemente:

$$(2) \quad \begin{Bmatrix} N(E, t) \\ P(E, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \exp \left[-\frac{x}{\Lambda} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_N(E+\eta, t-x) \\ \Phi_P(E+\eta+\beta_0 x, t-x) \end{Bmatrix} dx,$$

dove

$$(3) \quad \Phi_{N,P}(U, \tau) = (1-q) \begin{Bmatrix} N \\ P \end{Bmatrix}(U, \tau) + \bar{q} \begin{Bmatrix} P \\ N \end{Bmatrix}(U, \tau) + S(U-\eta, \tau).$$

Usando nella (3) le soluzioni di approssimazione zero, le (2) daranno le soluzioni di prima approssimazione. Come è stato mostrato in (I), le soluzioni di approssimazione zero della (1) si possono ottenere introducendo una funzione tentativo $\varrho(E)$ del rapporto fra protoni e neutroni, per la quale si è scelto la funzione $\beta_0/\beta(E)$. In tal modo la prima delle (1) si riduce ad un'equazione nella sola componente neutronica, avente come soluzione la

$$(4) \quad N_0(E, t) = \sum_0^\infty \frac{\{\sigma_N[E+(n+1)\eta]\}^{[(E-M)/\eta]+n}}{\{\sigma_N(E+\eta)\}^{(E-M)/\eta}} \left(\frac{\mathcal{E}}{\Lambda}\right)^{n+1} S(E+n\eta, t) \frac{(n, t/\mathcal{E})!}{(n, \infty)!},$$

che introdotta assieme alla $P_0(E, t) = \varrho(E)N_0(E, t)$ nelle (2) fornisce $N_1(E, t)$ e $P_1(E, t)$.

A rigore la $P_0(E, t)$ da usarsi sarebbe quella che segue dalla seconda delle (1) trasformata con la funzione $\varrho(E)$ (cfr. I, 14); data però la buona convergenza del metodo si è adottato il primo procedimento, che riduce notevolmente il calcolo.

2. - Componenti secondarie dei processi non radiativi.

Le equazioni che descrivono l'andamento nell'atmosfera delle componenti che degradano per solo frenamento in materia nucleare non sono altro che le (1) prive dei termini di sorgente, che vanno risolte con le condizioni ai limiti $N(E, 0) = 0$, $P(E, 0) = F_p(E)$, dove $F_p(E)$ è lo spettro protonico primario di Winckler. Per calcolare l'approssimazione zero del nuovo sistema con un metodo analogo a quello che ci ha condotto alla (4), si consideri il termine $P(E + \eta, t)$ a secondo membro della prima delle (1). Nel caso attuale, in questo termine si può distinguere un contributo $P^*(E + \eta, t)$, che è in prevalenza secondario di una componente già secondaria, al pari di $N(E + \eta, t)$, ed un contributo $S_w(E + \eta, t) = F_p(E + \eta + \beta_0 t) \exp[-tA]$, che è il residuo della primaria protonica $F_p(E + \eta + \beta_0 t)$ a quota t . Va tenuto presente che quest'ultimo contributo viene a mancare qualora non sia soddisfatta la condizione $E + \eta + \beta_0 t \geq E_\varphi$, avendo indicato con E_φ l'energia di taglio del campo magnetico alla latitudine φ . Infatti, un protone primario che urtando a quota t degrada all'energia E deve essere partito dal limite dell'atmosfera con energia $E + \eta + \beta_0 t$, che non può essere inferiore all'energia di taglio. Il fatto che debba essere $E \geq E_\varphi - \eta - \beta_0 t$ mostra chiaramente come tale contributo interessi una zona tanto più estesa dello spettro quanto più bassa è l'energia di taglio e quanto più si salga con la quota, mentre non dipende in modo sensibile dalla legge che regola il frenamento in materia nucleare.

Le due componenti $P^*(E + \eta, t)$ ed $N(E + \eta, t)$ si possono ora trattare, agli effetti del loro rapporto, alla stessa stregua delle analoghe componenti che figurano nelle (1), mentre il contributo $S_w(E + \eta, t)$ assume il significato di sorgente. Nel nostro caso la prima delle (1) si può pertanto scrivere:

$$(5) \quad \frac{\partial N_0(E, t)}{\partial t} = -\frac{N_0(E, t)}{A} + \frac{\sigma_N(E + \eta)}{A} N_0(E + \eta, t) + \frac{\bar{q}}{A} S_w(E + \eta, t),$$

dove $\sigma_N(E) = (1 - \bar{q}) + \bar{q}Q(E)$ e $Q(E) = \beta_0/\beta(E) = P^*(E, t)/N(E, t)$. Col solito procedimento la soluzione della (5) è data allora dalla

$$(6) \quad N_0(E, t) = \bar{q}(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{\sigma[E + (n+1)\eta]\}^{(E-M)/\eta+1-n}}{\{\sigma_N(E + \eta)\}^{(E-M)/\eta}} \left(\frac{1}{A}\right)^{n+1} \frac{I_n(E, t - t_\varphi)}{(n, \infty)!},$$

dove si è posto

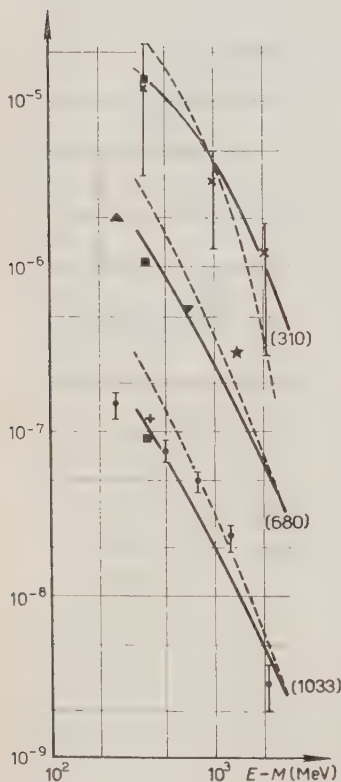
$$(7) \quad I_n(E, t - t_\varphi) = \int_0^{t-t_\varphi} S_w(E + \eta, t - x) x^n dx,$$

mentre t_φ resta determinato dalla relazione $\beta_0 t_\varphi = E_\varphi - (E + \eta)$, ed è ovviamente $t_\varphi = 0$ per $E + \eta \geq E_\varphi$. Questa limitazione nel valore di t non traduce altro che la precedente condizione relativa all'energia E . L'integrando della (7) è del tipo $(A_n - x)^{-2} x^n$ con $A_n \ll x$, ed è lecito pertanto sviluppare in serie la quantità in parentesi integrando quindi termine a termine; in pratica bastano i primi sei o sette termini dello sviluppo. Tenendo conto della posizione fatta per la (5), le soluzioni del sistema (1), senza il termine $S(E, t)$ e con le precedenti condizioni ai limiti, si possono scrivere analogamente alle (2)

$$(8) \quad \begin{Bmatrix} N(E, t) \\ P(E, t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \int \exp \left[-\frac{x}{A} \right] \begin{Bmatrix} \Psi_N(E + \eta, t - x) \\ \Psi_P(E + \eta + \beta_0 x, t - x) \end{Bmatrix} dx + \begin{Bmatrix} 0 \\ S_w(E, t) \end{Bmatrix},$$

dove le quantità Ψ_N e Ψ_P restano definite dalla

$$(9) \quad \Psi_{N,P}(U, \tau) = (1 - \bar{q}) \left\{ \frac{N}{P^* + S_w} \right\} (U, \tau) + \bar{q} \left\{ \frac{P^* + S_w}{N} \right\} (U, \tau).$$



Come nel caso precedente, la $N_0(E, t)$ data dalla (6) assieme alla $P_0^*(E, t) = \varrho(E)N_0(E, t)$ consentono di calcolare mediante le (8) il contributo di prima approssimazione alle componenti secondarie dei processi non radiativi.

3. - Confronto con i risultati sperimentali.

In fig. 1 sono dati in funzione dell'energia cinetica $E - M$ l'andamento delle due

Fig. 1. - Spettro differenziale in energia dei protoni (curve continue) e dei neutroni (curve tratteggiate) ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1} \text{MeV}^{-1}$). I numeri in parentesi indicano le quote in $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$. Dati sperimentali per i protoni:

- | | |
|----------------------|--------------------|
| ★ ALICHANIAN (1948), | ⊠ ANDERSON (1949), |
| ■ CONVERSI (1950), | + PEYROU (1950), |
| ▲ MILLER (1950), | ▼ GREGORY (1951), |
| ⊙ WILSON (1951). | |

Gli spettri sono stati normalizzati sul punto di Wilson al livello del mare relativo ad $E - M = 5 \cdot 10^2$ MeV. Per lo spettro primario di Winckler si è usata la funzione $0,38 \cdot 10^{-3} E^{-2}$, con E in 10^3 MeV.

componenti protonica e neutronica per le tre quote relative a 1033, 680 e 310 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$. Le curve relative ai protoni rendono in modo soddisfacente l'andamento dei risultati sperimentali, in particolare l'aumento di pendenza col diminuire della quota. Com'era da attendersi, la pendenza delle curve relative ai neutroni è superiore a quella delle analoghe curve dei protoni, in quanto l'assenza di perdite di energia per ionizzazione favorisce un arricchimento dello spettro neutronico nella zona delle basse energie. L'inversione che a 310 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$ si ha fra i due spettri intorno ai 10^3 MeV è dovuta alle diverse condizioni al limite dell'atmosfera.

Nelle tabelle I e II sono dati separatamente per le due componenti i contributi provenienti dagli urti anelastici, $P^{(a)}(E, t)$ e $N^{(a)}(E, t)$, quelli dovuti ai

TABELLA I. - Andamento del contributo anelastico, elastico e del residuo primario per i protoni in funzione dell'energia e della quota ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1} \text{MeV}^{-1}$).

| $E - M$ (MeV) | 400 | 600 | 800 | 1000 | 2200 | Quota ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$) |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| $P^{(a)}(E, t) \cdot 10^8$ | 7,30 | 3,05 | 1,60 | 0,97 | 0,16 | 1033 |
| $P^{(e)}(E, t)$ | 3,78 | 1,93 | 1,21 | 0,78 | 0,15 | |
| $S_w(E, t)$ | 0,017 | 0,015 | 0,013 | 0,012 | 0,008 | |
| $P^{(a)}(E, t) \cdot 10^7$ | 9,01 | 4,13 | 2,20 | 1,32 | 0,26 | 680 |
| $P^{(e)}(E, t)$ | 4,52 | 2,32 | 1,48 | 0,96 | 0,25 | |
| $S_w(E, t)$ | 0,17 | 0,15 | 0,13 | 0,12 | 0,06 | |
| $P^{(a)}(E, t) \cdot 10^6$ | 8,15 | 4,66 | 2,65 | 1,47 | 0,18 | 310 |
| $P^{(e)}(E, t)$ | 3,37 | 2,52 | 1,98 | 1,57 | 0,28 | |
| $S_w(E, t)$ | 2,57 | 2,12 | 1,77 | 1,50 | 0,69 | |

TABELLA II. - Andamento del contributo anelastico ed elastico per i neutroni in funzione dell'energia e della quota ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1} \text{MeV}^{-1}$).

| $E - M$ (MeV) | 400 | 600 | 800 | 1000 | 2200 | Quota ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$) |
|----------------------------|-------|------|------|------|------|--|
| $N^{(a)}(E, t) \cdot 10^8$ | 19,51 | 6,61 | 2,78 | 1,36 | 0,16 | 1033 |
| $N^{(e)}(E, t)$ | 4,51 | 2,15 | 1,39 | 0,90 | 0,16 | |
| $N^{(a)}(E, t) \cdot 10^7$ | 23,32 | 8,59 | 3,71 | 1,89 | 0,26 | 680 |
| $N^{(e)}(E, t)$ | 5,88 | 2,88 | 1,76 | 1,18 | 0,25 | |
| $N^{(a)}(E, t) \cdot 10^6$ | 14,48 | 8,61 | 4,97 | 2,67 | 0,18 | 310 |
| $N^{(e)}(E, t)$ | 6,52 | 3,91 | 2,52 | 1,69 | 0,28 | |

processi elastici $P^{(e)}(E, t)$ e $N^{(e)}(E, t)$, e infine per i protoni il residuo della componente primaria $S_w(E, t)$. Il contributo elastico è stato calcolato scegliendo per l'energia di taglio $E_\varphi - M$ il valore di 10^3 MeV. Come si vede, il contributo $P^{(a)}(E, t)$ è sempre confrontabile col contributo $P^{(e)}(E, t) + S_w(E, t)$, e, si noti bene, solo il primo è accompagnato da produzione di mesoni. Questo fatto va tenuto presente in uno studio di effetto di latitudine delle due componenti mesonica e protonica, in quanto al crescere della latitudine, cioè al diminuire dell'energia di taglio del campo magnetico, il contributo elastico ha sempre maggior peso, e l'effetto sarà pertanto più grande per la componente protonica che per quella mesonica. Le misure di effetto di latitudine fatte da CONVERSI ⁽⁵⁾ fra l'equatore e $\varphi = 59^\circ$ N, dove $E_\varphi - M$ è dell'ordine di 10^3 MeV, confermano pienamente questa conclusione. Questo autore trova infatti che fra le suddette latitudini l'intensità dei mesoni e dei protoni di range residuo $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ crescono secondo i fattori $1,87 \pm 0,14$ e $3,21 \pm 0,49$ rispettivamente. Tenendo conto delle curve di efficienza di SAND ⁽⁶⁾, si ha ora che mesoni registrati con tale range residuo sono prodotti ad una quota media di $200 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, e quindi sono mesoni prodotti con un range medio di $200 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$. In termini di energia si tratta pertanto di mesoni di 400 MeV e di protoni di 600 MeV, dato che anche per questi ultimi il contributo è praticamente dato dai protoni prodotti alla stessa quota media, cioè con lo stesso range medio. Siccome gli spettri di produzione di Bristol prevedono per mesoni di 400 MeV e protoni di 600 MeV la stessa intensità, non resta che concludere che la differenza nell'effetto di latitudine deve essere dovuta ad una componente assorbita in prevalenza attraverso processi elastici. Si potrebbe obiettare che, poichè l'energia media dei primari all'equatore è molto elevata, il rapporto mesoni-protoni sia qui favorevole ai mesoni per la presenza dei processi multipli, il che potrebbe giustificare la differenza negli effetti di latitudine. In realtà, dato il carattere locale delle due componenti, queste non possono essere associate che con una radiazione generatrice di moderata energia, dell'ordine di 10^3 MeV, che all'equatore non può che essere secondaria e pertanto confrontabile coll'analogica componente che genera mesoni e protoni registrati a latitudini settentrionali.

I risultati trovati giustificano anche quantitativamente il precedente ragionamento. Infatti, indicando con I_0 l'intensità all'equatore dei protoni di 400 MeV ($100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ di range residuo), trascurando gli errori, dalla $(P^{(a)} + P^{(e)} + S_w)/I_0 = 3,21$, con i dati della tabella I per $310 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ si ottiene $P^{(a)}/I_0 = 1,86$, rapporto praticamente uguale a quello trovato per i mesoni.

⁽⁵⁾ J. R. WINCKLER, S. STIX, K. DWIGHT e R. SABIN: *Phys. Rev.*, **79**, 656 (1950).

⁽⁶⁾ M. CONVERSI: *Phys. Rev.*, **79**, 749 (1950).

⁽⁷⁾ M. SANDS: *Phys. Rev.*, **77**, 180 (1950).

Nella tabella III si è infine dato l'andamento del rapporto effettivo $P(E, t)/N(E, t)$, nel senso che si è considerato il numero totale di protoni e neutroni, senza distinzione fra residuo primario e contributi anelastico e elastico. Questo rapporto va distinto dal rapporto $q(E, t)$, dove non compare il residuo primario e si riferisce quindi ai secondari dei processi sia elastici che anelastici. Sperimentalmente verrebbe misurato il rapporto effettivo, che regola, ad esempio, la produzione di stelle, e solo a quote dove il residuo primario è trascurabile i due rapporti si identificano. Mentre il rapporto $q(E, t)$ è una funzione lentamente variabile con la quota, e resta quindi giustificato a posteriori l'averlo approssimato con la funzione $\beta_0 \beta(E)$, il rapporto effettivo dipende in modo critico dalla quota nell'alta atmosfera, dove l'andamento delle due componenti deve riflettere le diverse condizioni ai limiti.

TABELLA III. - Andamento del rapporto effettivo $P(E, t)/N(E, t)$, del rapporto $q(E, t)$ e della funzione $\beta_0 \beta(E)$.

| $E - M$ (MeV) | 400 | 600 | 800 | 1 000 | 2 200 | Quota ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$) |
|---------------------------|------|------|------|-------|-------|--|
| $\frac{P(E, t)}{N(E, t)}$ | 0,46 | 0,57 | 0,68 | 0,77 | 0,99 | 1 033 |
| | 0,47 | 0,58 | 0,67 | 0,78 | 1,1 | 680 |
| | 0,67 | 0,74 | 0,85 | 1,04 | 2,5 | 310 |
| $q(E, t)$ | 0,46 | 0,57 | 0,68 | 0,77 | 0,97 | 1 033 |
| | 0,47 | 0,57 | 0,67 | 0,75 | 1,0 | 680 |
| | 0,55 | 0,57 | 0,62 | 0,70 | 1,0 | 310 |
| $\beta_0/\beta(E)$ | 0,51 | 0,63 | 0,71 | 0,77 | 0,91 | |

Ringraziamo il Prof. Puppi per alcune discussioni sull'argomento.

SUMMARY

The spectra of proton and neutron components between 400 e 2 200 MeV are given for the three atmospheric depths of 1 033, 680 and 310 $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$. The contributions due to radiative and non-radiative collision processes are discussed separately. As primary proton spectrum Winckler's one has been used. Both the ionization energy loss and the loss suffered in passing through a nucleus are assumed constant. The results obtained are in good agreement with the existing experimental observations on the behaviour of the proton component in air and on the latitude effect. For the proton-neutron ratio, distinction has been made between a function giving the ratio of secondaries only of both the components, and the real ratio, which takes account of the residual of primary proton spectrum. The former, not higher than unity, is a very slowly varying function of the depth, the latter coincides practically with the previous one in the low and middle atmosphere and increases rapidly approaching the top of the atmosphere.

A Reformulation of Field Theory.

H. C. CORBEN

*Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh U.S.A.
and Istituto di Fisica dell'Università, Genova*

(ricevuto il 7 Maggio 1952)

Summary. — An alternative formulation is given for the quantum theory of fields in which the charge on a particle is introduced as an operator rather than as a number. In addition to the advantage of mathematical simplicity, this formulation allows the fundamental properties of charge quantization and charge conservation to be deduced from the one hypothesis introduced to replace that of gauge invariance of the first kind. Systems of particles of different mass and charge may be treated more elegantly by this method, which is identical with the usual one for particles of spin zero, but which leads to a generalized Dirac equation which could be applied, for instance, to a mixed electron and neutrino field. This equation is very simply expressible in terms of modified field-dependent Dirac operators, and leads to oscillations of the specific charge of a particle analogous to the Zitterbewegung.

1. — Introduction.

The necessity for charge renormalization in quantum electrodynamics indicates that the usual method of introducing the electric charge into the equations of motion leaves something to be desired. It therefore seems worthwhile to write the quantized equations of motion of a particle in an electromagnetic field in a form in which the electric charges carried by the particles are represented, like other observables, by an operator even before the process of second quantization. Indeed the existence of charge exchange forces in nucleon-nucleon collisions has led to the introduction of isotopic spin operators for describing the nucleon charge, and it appears possible to formulate special relativistic quantum field theories in a general manner such that the charge on a particle is represented by an operator. In this paper we carry out such

a formulation, which possesses a number of advantages over the usual one ⁽¹⁾, and which at the same time is capable of direct generalization.

The method adopted is related to that used in projective and other types of unified field theories ^(2,6), but the present paper is developed independently within the framework of the special theory of relativity. We introduce an auxiliary variable $x_5 = u$ which has no physical significance, but which is such that the wave function for a particle of charge e has the form

$$(1.1) \quad \psi(x_\mu) = \psi(\mathbf{r}, t) \exp [iae u] \quad (\mu = 1 \dots 5)$$

where a is a constant. For definiteness we shall take a and x_5 both real, although the case in which both are imaginary may be developed with minor changes in the formalism. However, it is shown in Sec. 4 that the Hamiltonian (4.11) for a particle of spin $1/2$ is not Hermitean unless a and x_5 are real.

We may then consider a set of field variables $\psi_A(x_\mu)$ ($\mu = 1 \dots 5$) corresponding to particles of different charge, and in order to ensure that the charge on each particle is an integral multiple of e_0 , the charge on a positron, we postulate that all field variables are periodic in the variable u , with periodicity l , being eigenfunctions of the operator $\partial_5 = \partial/\partial u$

$$(1.2) \quad \partial_5 \psi_A = iae_A \psi_A,$$

or superpositions of such eigenfunctions. The eigenvalues e_A of $-ia^{-1}\partial_5$ are to be interpreted as the electric charges e_A carried by the particles which constitute the field ψ_A . It then follows that, if we choose the periodicity l of the variable u such that

$$(1.3) \quad l = 2\pi e_0^{-1} a^{-1},$$

the charge e_A is quantized as required

$$(1.4) \quad e_A = n_A e_0,$$

where n_A is an integer. This does, however, admit the possibility of multiply charged particles, in addition to the observed values $0, \pm 1$ and, in intermediate states, possibly 2 for n_A .

⁽¹⁾ See, for example, G. WENTZEL: *Quantum Theory of Fields* (Interscience, 1949).

⁽²⁾ TH. KALUZA: *Sitz. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 966 (1921); W. PAULI: *Ann. d. Phys.*, **18**, 305 (1933); A. PAIS: *Physica*, **8**, 1137 (1941); H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **9**, 235 (1952).

2. — General Theory.

The field theory may then be set up in the usual manner. A Lagrangian of the form

$$L = L(\psi_A, \psi_A^*, \partial_\mu \psi_A, \partial_\mu \psi_A^*) \quad (\mu = 1 \dots 5),$$

may be introduced, so that the field equations are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi_A)} \right) = \frac{\partial L}{\partial \psi_A}$$

and the conjugate complex set. We may further define a matrix

$$(2.1) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \partial_\nu \psi_A \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi_A)} - \partial_\nu \psi_A^* \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \psi_A^*)},$$

so that it follows from the equations of motion that

$$(2.2) \quad \partial_\mu \mathcal{T}_{\mu\nu} = 0.$$

We introduce a set of quantities $T_{\mu\nu}$, which are functions of only $x_1 \dots x_4$, and which are the values of $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ averaged over the parameter u :

$$(2.3) \quad T_{\mu\nu} = l^{-1} \int_0^l \mathcal{T}_{\mu\nu} du,$$

so that, if $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ is independent of u , $T_{\mu\nu} = \mathcal{T}_{\mu\nu}$.

In order to obtain the condition (1.4) of charge quantization it was necessary to postulate that the ψ_A are periodic in u , with periodicity l . This same condition is now seen to lead to true conservation laws of energy, momentum and charge, for it follows that if ψ_A is periodic in u so is $\mathcal{T}_{\mu\nu}$, so that on averaging (2.2) over u we have

$$(2.4) \quad \begin{cases} \partial_i T_{ij} = 0, \\ \partial_i T_{i5} = 0. \end{cases} \quad (i, j = 1 \dots 4).$$

The first of these is the energy-momentum conservation law and further we have from (1.2), (2.1)

$$\mathcal{T}_{i5} = iae_A \left(\psi_A^* \frac{\partial L}{\partial (\partial_i \psi_A^*)} - \psi_A \frac{\partial L}{\partial (\partial_i \psi_A)} \right)$$

which is proportional to the usual expression for the current density⁽³⁾. Thus the second of Eqs. (2.4) is an expression of the law of conservation of charge,

(3) Ref. (1), p. 15.

and in general we may define the current density as

$$(2.5) \quad j_i = (\hbar a)^{-1} T_{i5}.$$

In this way it is possible to treat energy, momentum and charge simultaneously without introducing explicitly the concept of gauge invariance of the first kind, and to relate the conservation of energy momentum and charge with the quantization of the charges of elementary particles, since in this formulation the one hypothesis of periodicity in the variable u leads to both consequences.

Several formulations of special relativistic field theories in general ⁽⁴⁾, and of Dirac electron theory in particular ⁽⁵⁾, have been devised with the aid of a fifth parameter, usually by defining \mathfrak{D}_5 as the operator corresponding to the mass of the particle. In the general formulation of field theory in the above manner, it would then be required that the proportionality factor between j_i and T_{i5} in (2.5) should involve the specific charge of the particle, and it is unsatisfactory that this factor should depend on the particular properties of the particles which happen to constitute the field.

3. — Complex scalar fields.

As an example, we consider a field of non-interacting spinless particles of charge zero, mass $m = \hbar \kappa c^{-1}$, and of charges $\pm e_0$, mass $\hbar \kappa' c^{-1}$, where

$$\kappa'^2 = \kappa^2 - e_0^2 a^2.$$

Such a mixed field may be described by the Lagrangian (*)

$$(3.1) \quad L = -c^2(\partial_\nu \psi^* \partial_\nu \psi + \kappa^2 \psi^* \psi),$$

⁽⁴⁾ F. HUND: *Zeits. f. Phys.*, **118**, 426 (1942); H. C. CORBEN: *Phys. Rev.*, **70**, 947 (1946).

⁽⁵⁾ Y. NAMBU: *Prog. Theor. Phys. (Japan)*, **5**, 82 (1950); R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **84**, 108 (1951).

(*) This corresponds to a classical particle theory in which

$$W^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 + e^2 \hbar^{-2},$$

where $\hbar = (a\hbar c)^{-1}$ (c. f. (3.6)). For $e/mc^2 \ll \hbar$, $p \ll mc$, this becomes

$$W = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{2b^2 mc^2},$$

where m may be regarded as the mass of the bare particle. The last term would then have to be interpreted as the work done in charging the particle.

for the equations of motion are

$$\partial_r \partial_r \psi = \kappa^2 \psi,$$

or

$$(3.2) \quad \square \psi = \mu^2 \psi,$$

with $\mu = \kappa$ for $e = 0$, $\mu = \kappa'$ for $e = \pm e_0$ (using (1.2)).

The current density carried by such a field is, from (2.5), the average over u of

$$\frac{e^2}{\hbar a} (\partial_5 \psi^* \partial_i \psi + \partial_i \psi^* \partial_5 \psi),$$

so that, since according to (1.1) ψ is of the form

$$\psi = \psi_0(r, t) + \psi_+(r, t) \exp[iae_0 u] + \psi_-(r, t) \exp[-iae_0 u],$$

corresponding to the neutral, positive and negative particles present, we have

$$(3.3) \quad j_i = ie_0 c^2 \hbar^{-1} \{ (\psi_+ \partial_i \psi_+^* - \psi_+^* \partial_i \psi_+) - (\psi_- \partial_i \psi_-^* - \psi_-^* \partial_i \psi_-) \},$$

as required, together with an exchange term which on averaging over u gives zero.

The momentum field $\pi = \partial L / \partial \dot{\psi} = \dot{\psi}^*$ may be introduced, so that

$$(3.4) \quad H = -\mathcal{C}_{44} = \pi^* \pi + c^2 \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \kappa^2 c^2 \psi^* \psi + c^2 \partial_5 \psi^* \partial_5 \psi,$$

which for particles of charge e_0 , mass κ' , is the usual expression.

Assuming a space periodicity region of volume V , we may expand ψ , π in Fourier series:

$$\begin{aligned} \psi &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, K} q_{\mathbf{k}, \kappa} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + Ku)], \\ \pi &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}, K} p_{\mathbf{k}, \kappa} \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + Ku)], \end{aligned}$$

where $K = nae_0$ ($n = 0, \pm 1$), so that the total energy is

$$W = t^{-1} \int H dx du = \sum_{\mathbf{k}, K} (p_{\mathbf{k}, K}^* p_{\mathbf{k}, K} + \omega_{\mathbf{k}, K}^2 q_{\mathbf{k}, K}^* q_{\mathbf{k}, K}),$$

where

$$\omega_{\mathbf{k}, K} = c(\mathbf{k}^2 + \kappa^2 + K^2)^{1/2}.$$

Similarly the total momentum is

$$P_i = -i \sum_{\mathbf{k}, K} k_i (p_{\mathbf{k}, K} q_{\mathbf{k}, K} - p_{\mathbf{k}, K}^* q_{\mathbf{k}, K}^*),$$

and the total charge is

$$Q = -i(a\hbar c)^{-1} \int \mathcal{T}_{45} dx du = -i(a\hbar)^{-1} \sum_{\mathbf{k}, K} K (p_{\mathbf{k}, K} q_{\mathbf{k}, K} - p_{\mathbf{k}, K}^* q_{\mathbf{k}, K}^*).$$

The field variables may be considered as operators, and energy momentum and charge may be made simultaneously diagonal in the usual way, with the obvious modification of the commutation relations to include different values of K :

$$(p_{\mathbf{k}, K}, q_{\mathbf{k}', K'}) = -i\hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{K, K'}.$$

Interaction between such particles and a given electromagnetic field may be described if the Lagrangian (3.1) is replaced by

$$(3.5) \quad L = -e^2 (\partial_\mu \psi^* G_{\mu\nu} \partial_\nu \psi + \kappa^2 \psi^* \psi),$$

where ⁽⁶⁾

$$(3.6) \quad G_{ij} = \delta_{ij}, \quad G_{i5} = G_{5i} = -bA_i, \quad G_{55} = 1 + b^2 A_i A_i, \quad (i, j = 1 \dots 4)$$

and we have written $b = (a\hbar c)^{-1}$. The equations of motion are then

$$(3.7) \quad \partial_\mu (G_{\mu\nu} \partial_\nu \psi) = \kappa^2 \psi,$$

and the conjugate complex equation. For A_i independent of x_5 (*), this may be written

$$(\partial_i - bA_i \partial_5)(\partial_i - bA_i \partial_5)\psi = (\kappa^2 - \partial_5 \partial_5)\psi,$$

so that, for particles of charge e , mass $\hbar\mu c^{-1}$, it becomes the Klein-Gordon equation

$$\left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c} A_i\right) \left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c} A_i\right) \psi = \mu^2 \psi,$$

with

$$\mu^2 = \kappa^2 + a^2 c^2.$$

⁽⁶⁾ Cf. O. KLEIN: *Zeits. f. Phys.*, **37**, 895 (1926).

(*) We note that this condition and the Lorentz condition may be written $\partial_\mu G_{\mu\nu} = 0$.

Indeed, for A_i independent of x_5 , the charge operator ∂_5 commutes with the Hamiltonian, the charge on each particle remains constant and the above formulation is equivalent to the usual one. Thus, for example, there is the usual extra contribution to the current density of amount

$$j'_4 = -2ec^2\hbar^{-2}A_i\psi^*\psi,$$

if ψ consists solely of particles of charge e . Also, canonical momenta may be defined thus:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^* + bc\varphi\partial_5\psi^*,$$

$$\pi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} + bc\varphi\partial_5\psi,$$

so that the Hamiltonian is

$$H = \pi^*\pi + c^2[(\nabla\psi^* - b\mathbf{A}\partial_5\psi^*) \cdot (\nabla\psi - b\mathbf{A}\partial_5\psi) + \\ + \kappa^2\psi^*\psi + \partial_5\psi^*\partial_5\psi] - bc\varphi(\pi\partial_5\psi + \pi^*\partial_5\psi^*),$$

which exceeds the unperturbed Hamiltonian (3.4) by

$$H' = -bc^2[\partial_5\psi^*\mathbf{A} \cdot \nabla\psi + \mathbf{A} \cdot \nabla\partial_5\psi + \varphi c^{-1}(\pi\partial_5\psi + \pi^*\partial_5\psi^*)] + b^2c^2\mathbf{A}^2\partial_5\psi^*\partial_5\psi.$$

The average value over u of this interaction Hamiltonian is

$$-j_i \frac{A_i}{c} - b^2c^2l^{-1}\mathbf{A}^2 \int \partial_5\psi^*\partial_5\psi dx_5,$$

which for particles of charge e reduces to the usual expression

$$-j_i \frac{A_i}{c} - \frac{e^2}{\hbar^2} \mathbf{A}^2 \psi^* \psi.$$

The complete equivalence of the above formalism to the usual one for particles of a given fixed charge makes it of interest to linearize the above equations in the manner employed by Dirac to obtain equations for particles of spin 1/2. Here, however, complete equivalence to the Dirac theory does not emerge from this formalism.

4. — Particles of spin 1/2.

For free particles of spin 1/2 we postulate the Lagrangian

$$(4.1) \quad L = i\hbar c \psi^+ (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi,$$

where

$$(4.2) \quad \psi^+ = i\psi^* \beta, \quad \gamma_j = -i\beta \alpha_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad \gamma_4 = \beta, \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = -\varrho_1.$$

Thus

$$(4.3) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0, \quad (\partial_\mu \psi^+) \gamma_\mu = \kappa \psi^+,$$

and

$$(4.4) \quad \mathcal{C}_{\mu\nu} = -i\hbar c \psi^+ \gamma_\mu \partial_\nu \psi.$$

The usual expression for the current density then follows from (2.5) for particles of charge e (using (1.2))

$$(4.5) \quad j_i = ec \psi^+ \gamma_i \psi.$$

However, the matrix

$$(4.6) \quad \mathcal{C}'_{\mu\nu} = -\frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \gamma_\mu \partial_\nu \psi - (\partial_\nu \psi^+) \gamma_\mu \psi)$$

is also conserved and as it possesses the correct reality properties it may be introduced instead of (4.4), corresponding to the Lagrangian

$$(4.7) \quad L' = \frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \gamma_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^+) \gamma_\mu \psi + 2\kappa \psi^+ \psi).$$

The expression (4.5) for the current density also follows from (4.6) for particles of charge e . The Hamiltonian corresponding to (4.7) is

$$H = \pi \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \pi^* = -\mathcal{C}'_{44} = \pi (-c\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla \psi - c\varrho_3 \partial_5 \psi - i\kappa c \beta \psi) + \\ + (-c\nabla \psi^* \cdot \boldsymbol{\alpha} - c\partial_5 \psi^* \varrho_3 + i\kappa c \psi^* \beta) \pi^*,$$

where

$$\pi = \frac{i\hbar}{2} \psi^*, \quad \pi^* = -\frac{i\hbar}{2} \psi.$$

On the other hand, from the symmetrized energy-momentum-current matrix

$$(4.8) \quad \mathcal{T}_{\mu\nu}'' = -\frac{i\hbar c}{4} (\psi^\dagger \gamma_\mu \partial_\nu \psi + \psi^\dagger \gamma_\nu \partial_\mu \psi - (\partial_\nu \psi^\dagger) \gamma_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^\dagger) \gamma_\nu \psi),$$

one has, as usual, for the momentum density of particles of momentum \mathbf{p} , energy W ,

$$(4.9) \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} \psi^* \psi + \frac{W}{c} \psi^* \boldsymbol{\alpha} \psi \right),$$

consistent with the interpretation of $c\boldsymbol{\alpha}$ as the velocity operator. Similarly the current and charge densities for particles of charge e , momentum \mathbf{p} , energy W now also consists of two terms:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{ec}{2} \psi^* \boldsymbol{\alpha} \psi + \frac{bc^2}{2} \mathbf{p} \psi^* \varrho_2 \psi, \\ \varrho &= \frac{e}{2} \psi^* \psi + \frac{b}{2} W \psi^* \varrho_2 \psi, \end{aligned}$$

consistent with the interpretation of the operator ϱ_2 as e/bW , i.e. of $bc^2\varrho_2$ as the specific charge operator. The specific charge of a particle therefore exhibits fluctuations in this theory analogous to the Zitterbewegung of the Dirac theory. These fluctuations are of amplitude bc^2 and, for a neutral particle, average out over times large compared with $\hbar W^{-1}$.

The equations of motion (4.3) derivable from (4.1) or (4.7) are consistent, and the energy operator is Hermitean, only if $x_5 = u$ is real, i.e. «space-like». Indeed, in the usual theory, the Lagrangian (4.1) with $\mu = 1 \dots 4$ is made real because β anticommutes with $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and commutes with γ_4 . Since there is no operator of the group which also commutes with γ_5 it is not possible to make (4.1) real if x_5 is time-like (*). The equation of motion may be written

$$(4.11) \quad W\psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - i\varrho_2 \hbar c \partial_5 + \beta Mc^2)\psi, \quad (\kappa = Mck^{-1}),$$

(*) There is of course the operator ϱ_2 which commutes with $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ and anticommutes with γ_4, γ_5 , but this requires an imaginary mass for the particle even if (see 4.17) $\kappa = 0$.

or, for particles of charge e , according to (1.2)

$$(4.12) \quad W\psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + b^{-1}\rho_2 e + \beta Mc^2)\psi.$$

Thus, for real e , it is necessary that b be real, making the charged particle heavier than its neutral counterpart. It is then not possible to treat the neutron and proton as different states of a particle which is described by (4.11). On the other hand, the mass difference between a charged particle and the corresponding "bare" particle is not only proportional to e^2 but is now forced to appear with the right sign as if the difference were due to the self-energy of the charge.

Independent plane wave solutions of (4.12) exist of the form

$$\psi_i(\mathbf{r}, t, u) = u_i \exp[i\hbar^{-1}p_\mu x_\mu] = u_i \exp[i\hbar^{-1}p_i x_i] \exp[iaeu],$$

with $p_\mu p_\mu = -M^2 c^2$, or

$$(4.13) \quad e = \pm b(W^2 - M^2 c^4 - \mathbf{p}^2 c^2)^{1/2},$$

corresponding to two signs of the charge. We have, for instance

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{llll} u^{\text{I}} : & u_1 = 1, & u_2 = 0, & u_3 = \frac{cp_x + ib^{-1}e}{W + Mc^2}, & u_4 = \frac{c(p_x + ip_y)}{W + Mc^2}, \\ u^{\text{II}} : & u_1 = 0, & u_2 = 1, & u_3 = \frac{c(p_x - ip_y)}{W + Mc^2}, & u_4 = \frac{-(cp_x - ib^{-1}e)}{W + Mc^2}, \\ u^{\text{III}} : & u_1 = \frac{cp_x - ib^{-1}e}{W - Mc^2}, & u_2 = \frac{c(p_x + ip_y)}{W - Mc^2}, & u_3 = 1, & u_4 = 0, \\ u^{\text{IV}} : & u_1 = \frac{c(p_x - ip_y)}{W - Mc^2}, & u_2 = \frac{-(cp_x + ib^{-1}e)}{W - Mc^2}, & u_3 = 0, & u_4 = 1. \end{array} \right.$$

For each of these solutions, the contribution from the second terms of (4.10) is equal to that from the first terms, as for the momentum density (4.9).

For $p_x, p_y, p_z = 0$, these solutions become

$$(4.15) \quad u^{\text{I}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^{\text{II}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} u^{\text{III}} = \varepsilon^{-1} u^{\text{I}} \\ u^{\text{IV}} = \varepsilon^{-1} u^{\text{II}} \end{array},$$

with

$$(4.16) \quad \varepsilon = \frac{ib^{-1}e}{W + Mc^2} = \frac{ib(W - Mc^2)}{e}.$$

Thus in this limit (4.14) yields only two independent solutions, corresponding to eigenvalues ± 1 of σ_z , and moreover these solutions are no longer eigenfunctions of β .

To describe a field of electrons and positrons, however, it is possible to use the above formalism with $\kappa = 0$, i.e. $M = 0$, and b chosen thus (*):

$$(4.17) \quad b = \frac{e_0}{mc^2},$$

where m is the mass, e_0 the charge, of the positron. This also has the advantage of including a neutrino field (**) as a state which is represented by a ψ which is independent of u . We then have, for a state of zero momentum, $\varepsilon = \pm bW$ corresponding to $\varepsilon = \pm i$ in (4.15). For these values of ε , however, u^I and u^{II} are eigenfunctions of ϱ_2 , belonging to the eigenvalues $-\varepsilon$. The solutions are thus classifiable, not in terms of the signs of spin and energy, but in terms of the signs of spin and specific charge (***). In this way the free electron, neutrino, and positron may be described by the one equation

$$(4.18) \quad \gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0.$$

Thus if $\Gamma_i = i\gamma_5\gamma_i$, we have (****)

$$(4.19) \quad \Gamma_i \partial_i \psi - g\mu\psi = 0,$$

with

$$\mu = \frac{mc}{\hbar} > 0, \quad g = \frac{e}{e_0} = \begin{matrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \left\{ \text{for the } \begin{matrix} \text{positron} \\ \text{neutrino} \\ \text{electron} \end{matrix} \right.$$

(*) This choice makes l , the periodicity interval of the field variables in the coordinate u , (1.3) equal to the Compton wave length h/mc of the positron. The assumed periodicity in such a short interval is then at least not inconsistent with the unobservability of u .

(**) That is, taking the rest mass of the neutrino as zero. Experimentally, the mass has been shown to be less than 5 keV. (O. KOFOED-HANSEN: *Phil. Mag.*, **42**, 1448 (1951).

(***) Alternately one may introduce the magnetic moment operator $\mu = (1/2a)\varrho_2\sigma$ and classify the solutions according to the eigenvalues of μ_z and σ_z .

(****) For particles in an eigenstate $e = e_0$ of charge, this reduces to the Dirac equation under the trivial transformation $\varrho_2 \rightarrow \varrho_3$; $\varrho_3 \rightarrow -\varrho_2$.

When a given electromagnetic field acts on the particles, we may replace the Lagrangian (4.7) by

$$(4.19) \quad L' = \frac{i\hbar c}{2} (\psi^+ \gamma'_\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^+) \gamma'_\mu \psi + 2\kappa \psi^+ \psi),$$

where the γ'_μ are operators such that ⁽⁷⁾

$$(4.20) \quad \gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu = 2G_{\mu\nu},$$

with the $G_{\mu\nu}$ given in terms of the electromagnetic potentials by (3.6). Thus, for, $i, j = 1 \dots 4$

$$\begin{aligned} \gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i &= 2\delta_{ij}, & \gamma'_i \gamma'_5 + \gamma'_5 \gamma'_i &= -2bA_i, \\ (\gamma'_i)^2 &= 1, & (\gamma'_5)^2 &= 1 + b^2 A_i A_i. \end{aligned}$$

Hence we may take

$$(4.21) \quad \gamma'_i = \gamma_i, \quad \gamma'_5 = \gamma_5 - b\gamma_i A_i,$$

with γ_i, γ_5 defined by (4.2), being the usual Dirac operators:

$$(4.22) \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Thus in this formulation the charge appears as a pseudo-scalar and the potentials as a pseudo-vector. Under improper Lorentz transformations their product then transforms as a vector.

For $\partial_5 A_i = 0$, the equation of motion which follows from (4.19) is

$$(4.23) \quad (\gamma'_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0,$$

or

$$(\gamma_i (\partial_i - bA_i \partial_5) + \gamma_5 \partial_5 + \kappa) \psi = 0,$$

which becomes, for particles of charge e

$$\left[\gamma_i \left(\partial_i - \frac{ie}{\hbar c} A_i \right) + iae\gamma_5 + \kappa \right] \psi = 0,$$

⁽¹⁾ Cf. the treatment of a Dirac electron in a gravitational field. H. TETRODE: *Zeits. f. Phys.*, **49**, 858 (1927); E. SCHRÖDINGER: *Berl. Ber.*, nr. **11-12**, 105 (1932).

the generalization of (4.3) when there is an electromagnetic field present. As before, we may take $\kappa = 0$, with $b = (a\hbar c)^{-1}$ given by (4.17) so that the equation of motion for electrons positrons and neutrinos in an electromagnetic field takes the very simple form

$$(4.24) \quad \gamma'_\mu \partial_\mu \psi = 0.$$

However, this equation admits also the possibility of other particles with the specific charge of the electron or positron but with two or more units of charge.

Independently of the value of κ , the canonical energy-momentum-current matrix is

$$(4.25) \quad \mathcal{T}'_{\mu\nu} = -\frac{i\hbar c}{2} (\psi^\dagger \gamma'_\mu \partial_\nu \psi - (\partial_\nu \psi^\dagger) \gamma'_\mu \psi),$$

which for particles of charge e yields the same expression (4.5) for the current density as in the absence of an electromagnetic field. Indeed it is easily verified that the Lagrangian (4.19) differs from that for the field-free case (4.7) by the usual interaction term $e^{-1} j_i A_i$. Now, however, we have

$$(4.26) \quad \partial_\mu \mathcal{T}'_{\mu\nu} = b(\partial_\nu A_i) \mathcal{T}'_{i5},$$

so that, if $\partial_5 A_i = 0$, the current of the particles is conserved, consistent of course with the fact that under this condition the operator ∂_5 commutes with the Hamiltonian so that the charge on each particle is a constant of the motion. Averaging (4.26) over u then yields

$$\partial_i T'_{ij} = \frac{j_i}{e} \partial_j A_i, \quad \partial_i j_i = 0,$$

so that

$$\partial_i t_{ij} = \frac{-j_i}{e} f_{ij},$$

where

$$t_{ij} = T'_{ij} - \frac{j_i}{e} A_j.$$

Still imposing the auxiliary condition $\partial_\mu G_{\mu\sigma} = 0$, i.e. $\partial_i A_i = 0$, $\partial_5 A_i = 0$, we may of course add to (4.19) the usual Lagrangian for the electromagnetic

field itself:

$$L_{\text{em}} = -\frac{1}{4} (\partial_i A_i - \partial_j A_j)^2 - \frac{1}{2} (\partial_i A_i)^2,$$

so that

$$\square A_i = -\frac{1}{c} \dot{j}_i.$$

The current density (2.5) associated with the electromagnetic field is then zero as required.

In the quantized theory, in which the A_i are operators, we generalize (4.20) to yield also an anticommutation rule of the γ'_μ at different space time points:

$$(4.27) \quad [\gamma'_\mu(y), \gamma'_\nu(z)]_+ = 2G_{\mu\nu}(y, z),$$

where $G_{\mu\nu}(y, z)$ reduces to the $G_{\mu\nu}$ of (4.20) when y and z are the same point. We then find that the assumption that the *anticommutator* of γ'_μ, γ'_ν is a *c-number* with respect to the Dirac operators γ_μ is sufficient to ensure the *commutation* of different components of A_i at different points. Using (4.21) (4.22) we have in fact that

$$\gamma_i \gamma_j (A_i(z), A_j(y))_- ,$$

is a *c-number* with respect to the Dirac operators γ_μ , so that for $i \neq j$,

$$(A_i(z), A_j(y))_- = (A_j(z), A_i(y))_- .$$

For arbitrary fields, $A_i(z)$ and $A_j(z)$ are independent for $i \neq j$, and hence

$$(A_i(z), A_j(y))_- = 0 \quad (i \neq j).$$

Commutation relations for $i = j$ cannot be deduced from (4.27). The function $G_{\mu\nu}(y, z) = G_{\nu\mu}(z, y)$ is then given by (c. f. (3.6))

$$G_{ij} = \delta_{ij}, \quad G_{i5}(y, z) = -bA_i(z), \quad G_{5i}(y, z) = -bA_i(y),$$

$$G_{55} = 1 + \frac{b^2}{2} (A_i(y)A_i(z) + A_i(z)A_i(y)).$$

5. - Coordinate and gauge transformations.

We consider the general coordinate transformation

$$(5.1) \quad x_\mu \rightarrow x_\mu^*(x_\nu),$$

with which is associated that of the momenta

$$p_\mu = \frac{\partial x_\nu^*}{\partial x_\mu} p_\nu^*.$$

The condition that $G_{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ be invariant under this transformation is that

$$(5.2) \quad G_{\mu\nu}^* = G_{\sigma\varrho} \frac{\partial x_\mu^*}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_\nu^*}{\partial x_\varrho}.$$

It is well-known that a special case of this transformation is

$$(5.3) \quad \begin{cases} x_i^* = x_i, & p_5^* = p_5 (= e/bc), \\ x_5^* = x_5 + b\chi(r, t), & p_i^* = p_i - bp_5 \partial_i \chi, \\ A_i^* = A_i - \partial_i \chi, \end{cases}$$

which is the usual gauge transformation of the second kind if

$$(5.4) \quad \square \chi = 0,$$

which is a necessary and sufficient condition that the supplementary condition $\partial_\mu G_{\mu\sigma} = 0$ be preserved under the transformation. Thus this type of gauge transformation corresponds to a simple displacement in the x_5 direction of an amount equal to b times the generating function. The most general transformation of the type (5.1) which leaves $G_{ij} = \delta_{ij}$ invariant and preserves the supplementary condition is

$$(5.5) \quad \begin{cases} x_i^* = a_{ij} x_j & (i, j, k = 1 \dots 4) \\ x_5^* = Ax_5 + b\chi(x_i) \\ a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} & (A, a_{ik} \text{ numbers}), \end{cases}$$

of which (5.3) is the particular case $a_{ij} = \delta_{ij}$, $A = 1$. The Lorentz group is of course the particular case $\chi = 0$, $A = 1$.

Under (5.3) the modified Dirac operators (4.21) transform as follows:

$$(5.6) \quad \gamma_i'^* = \gamma_i' = \gamma_i, \quad \gamma_5'^* = \gamma_5' + b\gamma_i \partial_i \chi,$$

leaving the form of (4.24) invariant. For $\kappa = 0$, the Hamiltonian for a particle of spin 1/2 is here

$$H = W = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - i\hbar c(\varrho_2 - b\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A})\partial_5 - ib\hbar c\varphi\partial_5,$$

so that

$$\dot{\mathbf{x}} = c\boldsymbol{\alpha}, \quad \dot{x}_5 = c\varrho_2 + bc(\varphi - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}).$$

Under the transformation (5.3) of the potentials, this becomes

$$\dot{x}_5^* = \dot{x}_5 + b \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \chi \right) = \dot{x}_5 + b \dot{\chi},$$

in agreement with the classical result.

6. — Conclusion.

The above is a formulation of field theory in which the electric charge is introduced as an operator rather than as a c -number. The consequent symmetrical treatment of energy, momentum and current densities allows these quantities to be specified from the Lagrangian by a single prescription as in projective field theories. The condition of gauge invariance of the first kind is replaced by the periodicity condition from which not only the conservation, but also the quantization, of charge may be deduced. The condition of gauge invariance of the second kind becomes in this formalism an invariance under a particular type of coordinate transformation.

For particles of spin zero and of given charge, this formalism reduces to the usual one, though for particles of spin 1/2 it yields a modified equation, the plane wave solutions of which in free space are characterized by the signs of the spin and of the specific charge of the particle. In the presence of a field one is led to an equation which may be used to describe electrons positrons and neutrinos, and which is very simply expressible in terms of modified field dependent Dirac operators. In the quantized theory the anticommutation rules of these operators have as a consequence the commutation of different potential components. The simplicity of the Dirac equation in this formulation implies also a simplification of calculations in quantum electrodynamics as it is not necessary to treat separately terms involving the mass.

By suitable choice of the constant a , the theory could be applied to π^0 , π^\pm mesons, although Eq. (4.23) is not applicable to neutrons and protons unless, somewhat arbitrarily, γ_5 is replaced by $i\gamma_5$. The formalism is capable of direct generalization by relaxing the condition that the electromagnetic potentials are independent of u , giving rise to charged quanta the mass of which would depend on the choice of the constant a . However, one consequence of this field theory is that there should exist multiply charged particles, the experimental evidence for which is very slender.

I am grateful to the Fulbright Commission for a visiting professorship to the Universities of Genoa and Milan.

RIASSUNTO (*)

L'A. formula una nuova teoria quantistica dei campi, in cui la carica di una particella è introdotta come operatore anzichè come numero. Oltre al vantaggio della semplicità matematica, questa formulazione permette di dedurre le proprietà fondamentali dalla quantizzazione e della conservazione della carica dall'unica ipotesi introdotta per sostituire quella dell'invarianza di gauge di prima specie. Questo metodo che è identico al metodo usuale per particelle di spin zero, ma che conduce a un'equazione di Dirac generalizzata che potrebbe applicarsi, ad esempio, a un campo misto di elettroni e neutrini, permette di trattare con maggior eleganza i sistemi di particelle di carica e massa differenti. La suddetta equazione si può molto semplicemente esprimere in termini di operatori di Dirac modificati, dipendenti dal campo, e conduce a oscillazioni della carica specifica di una particella analoghe alla Zitterbewegung.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase.

B. HOLMBERG

Department of Mechanics and Mathematical Physics - University of Lund (Sweden)

(ricevuto il 22 Maggio 1952)

Summary. — It is shown that the impossibility of determining the potential between two particles from the asymptotic phases when there exist also bound states, comes from the fact that it is not possible to extend the orthogonality relations given by FRÖBERG and HYLLERAAS to the discrete eigenfunctions. An expression in terms of these functions is given for the difference between two phase equivalent potentials with the same energy spectrum. Finally, (in the case when only one bound state exists) an explicit formula is given for constructing this difference if one special potential and its corresponding eigenfunction is known.

The problem of determining the potential between two particles in non-relativistic approximation if the asymptotic phases are known from scattering experiments has been treated by FRÖBERG ⁽¹⁾ and HYLLERAAS ⁽²⁾. If, however, also bound states exist it is not possible to determine the potential uniquely from the phase shift and the energies of the bound states, as was demonstrated by BARGMANN ⁽³⁾ by counter examples.

As BARGMANN points out this arises from the fact that in the case when a bound state exists, the system of « continuous » functions used by HYLLERAAS is not a complete set. At first sight one would then believe that if extended to include also the « discrete » eigenfunctions a proof of the uniqueness might be constructed but as Bargmann's examples show, this is not the case.

It may be worth while to investigate, why the procedure does not work

⁽¹⁾ C. E. FRÖBERG: *Arkiv f. mat. astr. o. fys.*, **35** A, nr. 17 and **36** A, n. 11 (1948).

⁽²⁾ E. HYLLERAAS: *Phys. Rev.*, **74**, 48 (1948).

⁽³⁾ V. BARGMANN: *Phys. Rev.*, **75**, 301 (1949); *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 488 (1949).

in this case and also to consider, if anything can be said about the connections between the different phase equivalent potentials.

The radial Schrödinger equation for two particles with the same mass interacting by a potential $U(r)$ (which fulfils the ordinary requirements of going towards infinity slower than $1/r^2$ at the origin and vanishing faster than $1/r$ at infinity) has the form:

$$(1) \quad \frac{d^2 u_k}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_k + k^2 u_k + U(r) u_k = 0.$$

Let u_{1k} be the solution, which is zero at the origin and behaves for large r according to

$$(2.1) \quad u_{1k} \xrightarrow{\text{asympt.}} \frac{N^U}{i} (S_k^U \exp[ikr] + (-1)^{l+1} \exp[-ikr]);$$

($S_k^U = \exp[2i\eta_k^U]$, where η_k^U is the asymptotic phase).

We then choose u_{2k} to be the solution of (1), which for large r behaves like

$$(2.2) \quad u_{2k} \xrightarrow{\text{asympt.}} N^U (S_k^U \exp[ikr] + (-1)^l \exp[-ikr]).$$

For another potential $V(r)$ we have correspondingly

$$(1') \quad \frac{d^2 v_k}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} v_k + k^2 v_k + V(r) v_k = 0;$$

$$(2.1') \quad v_{1k} \xrightarrow{\text{asympt.}} \frac{N^V}{i} (S_k^V \exp[ikr] + (-1)^{l+1} \exp[-ikr]);$$

$$(2.2') \quad v_{2k} \xrightarrow{\text{asympt.}} N^V (S_k^V \exp[ikr] + (-1)^l \exp[-ikr]).$$

The formulae (2.1) and (2.2) may be extended to complex values of k , as was shown by MÖLLER (4). In particular, if $k = -i\lambda_s$, (λ_s pos., real), where $-\lambda_s^2$ is an eigenvalue to (1), we have,

$$(3) \quad S_{-i\lambda_s}^U = 0,$$

and accordingly,

$$(4.1) \quad u_{1-i\lambda_s}(r) = u_{1s}(r) \xrightarrow{\text{asympt.}} \frac{N_s^U}{i} (-1)^{l+1} \exp[-\lambda_s r];$$

$$(4.2) \quad u_{2-i\lambda_s}(r) = u_{2s}(r) \xrightarrow{\text{asympt.}} N_s^U (-1)^l \exp[-\lambda_s r],$$

(4) C. MÖLLER: *Danske Vid. Selsk. Medd.*, **22**, nr. 19 (1946).

which implies

$$(5) \quad \dots u_{1s}(r) = -i u_{1s}(r).$$

N^v is an arbitrary numerical factor, which for the continuous case is usually chosen to be 1/2, but for the discrete case we prefer to choose N_s^v so that $\int_0^\infty (u_{1s}(r))^2 dr = 1$, after first performing the analytical continuation for a fixed N^v .

Analogously we may define $v_{1s}(r)$ and $v_{2s}(r)$.

We form the functions:

$$(6) \quad Y_k = u_{1k} v_{1k} \xrightarrow{\text{asympt.}} N^v V^v (-1) \{ S_k^v S_k^v \exp [2ikr] + \\ + (-1)^{l+1} (S_k^v + S_k^v) + \exp [-2ikr] \},$$

$$(7) \quad Z_k = u_{1k} v_{2k} + u_{2k} v_{1k} \xrightarrow{\text{asympt.}} N^v N^v \frac{2}{i} \{ S_k^v S_k^v \exp [2ikr] - \exp [-2ikr] \}.$$

Now we have the following relation (HYLLERAAS: loc. cit. (21)):

$$4(k^2 - \kappa^2) \int_0^\infty Y'_k Z_\kappa dr + [Y''_k Z_\kappa - Y'_k Z'_\kappa]_0^\infty - \\ - [Y_k (u_{1\kappa} v_{2\kappa}'' + u_{1\kappa}'' v_{2\kappa} - 2u_{1\kappa}' v_{2\kappa}' + u_{2\kappa} v_{1\kappa}'' + u_{2\kappa}'' v_{1\kappa} - 2u_{2\kappa}' v_{1\kappa}')_0^\infty + \\ + \{ (u_{1k} v_{1k}' - u_{1k}' v_{1k}) (u_{1\kappa} v_{2\kappa}' - u_{1\kappa}' v_{2\kappa} + u_{2\kappa} v_{1\kappa}' - u_{2\kappa}' v_{1\kappa}')_0^\infty = 0.$$

For large r we have according to (2.1), (2.2):

$$u'_{1k} = k u_{2k}; \quad u'_{2k} = -k u_{1k} \quad \text{and analogously for } v_{1k}, v_{2k}.$$

The terms in the last two brackets are thus zero in the upper limit and as we have no contribution from $r = 0$, (6) reduces to:

$$(8) \quad -4(k^2 - \kappa^2) \int_0^\infty Y'_k Z_\kappa dr = [Y''_k Z_\kappa - Y'_k Z'_\kappa]_0^\infty,$$

or integrating by parts

$$(8) \quad 4(k^2 - \kappa^2) \int_0^\infty Y_k Z'_\kappa dr = [Y''_k Z_\kappa - Y'_k Z'_\kappa]_0^\infty.$$

Introducing (6) and (7) we obtain,

$$4(k^2 - \kappa^2) \int_0^\infty Y_k Z'_\kappa dr = N_k^U N_k^V N_\kappa^U N_\kappa^V \frac{8k}{i} \cdot \\ \cdot [(k - \kappa)(S_k^U S_k^V S_\kappa^U S_\kappa^V \exp [2i(k + \kappa)r] - \exp [-2i(k + \kappa)r]) - \\ - (k + \kappa)(S_k^U S_k^V \exp [2i(k - \kappa)r] - S_\kappa^U S_\kappa^V \exp [-2i(k - \kappa)r])]^\infty.$$

In all physically interesting cases only the last term gives any contribution and we get,

$$\frac{1}{k} \int_0^\infty Y_k Z'_\kappa dr = -N_k^U N_k^V N_\kappa^U N_\kappa^V \frac{2}{i} \frac{1}{k - \kappa} [S_k^U S_k^V \exp [2i(k - \kappa)r] - \\ - S_\kappa^U S_\kappa^V \exp [-2i(k - \kappa)r]]^\infty.$$

For k, κ real, pos. this gives (apart from a factor) the well known relations of FRÖBERG and HYLLEAAS:

$$(9) \quad \frac{1}{k} \int_0^\infty Y_k Z'_\kappa dr = -(N^U N^V)^2 S_k^U S_k^V 4\pi \delta(k - \kappa).$$

Suppose now that $k = -i\lambda_s$, where $k^2 = -\lambda_s^2$ is a discrete eigenvalue to U . We then have

$$(10) \quad \frac{1}{-i\lambda_s} \int_0^\infty Y_s Z'_\kappa dr = -N_s^U N_s^V N_\kappa^U N_\kappa^V \frac{2}{i} - \frac{1}{i\lambda_s - \kappa} \cdot \\ \cdot [S_{-i\lambda_s}^U S_{-i\lambda_s}^V \exp [2i(-i\lambda_s - \kappa)r] - S_\kappa^U S_\kappa^V \exp [-2i(-i\lambda_s - \kappa)r]]_0^\infty.$$

As $S_{-i\lambda_s}^U = 0$ (3), this gives:
for κ real, pos.:

$$(11) \quad \frac{1}{-i\lambda_s} \int_0^\infty Y_s Z'_\kappa dr = 0;$$

for $\kappa = -i\lambda_{s'}$, eigenvalue to $U(\lambda_s \neq \lambda_{s'})$:

$$(11') \quad \frac{1}{-i\lambda_s} \int_0^\infty Y_s Z'_{s'} dr = 0.$$

Finally, for $\kappa = -i\lambda_s$, we put $\kappa = -i\lambda_s + \mu$, where μ is a small, real quan-

tity. Expanding into a series we have:

$$S_{-i\lambda_s+\mu}^v = S_{-i\lambda_s}^v + \mu \left(\frac{\partial S_k^v}{\partial k} \right)_{-i\lambda_s} = \mu \left(\frac{\partial S_k^v}{\partial k} \right)_{-i\lambda_s},$$

according to (3). Introducing into (10) we get in the limit:

$$(12) \quad -\frac{1}{\lambda_s} \int_0^\infty Y_s Z'_s dr = -(N_s^u N_s^v)^2 \cdot 2 S_{-i\lambda_s}^v \left(\frac{\partial S_k^v}{\partial k} \right)_{-i\lambda_s},$$

which is usually different from zero. But if $-i\lambda_s$ is an eigenvalue also to V , $S_{-i\lambda_s}^v = 0$, and we get:

$$(13) \quad \frac{1}{\lambda_s} \int_0^\infty Y_s Z'_s dr = 0.$$

As we shall see, it is just this « mutual » orthogonality between two functions corresponding to the same eigenvalue, that gives the ambiguity in the potential.

Now return to the equation (1) and (1') for u_{1k} , v_{1k} . Multiplying by v'_{1k} , u'_{1k} , respectively, subtracting and integrating we get,

$$(14) \quad [v_{1k} u'_{1k} - u_{1k} v'_{1k}]_0^\infty = - \int_0^\infty (U - V) u_{1k} v_{1k} dr = - \int_0^\infty (U - V) Y_k dr.$$

Introducing (2.1), (2.1') we get the relation (5),

$$(15) \quad 2i(-1)^1 N_k^v N_k^v (S_k^v - S_k^v) = \frac{1}{k} \int_0^\infty (U - V) Y_k dr,$$

which gives for a discrete eigenvalue $k = -i\lambda_s$ to U :

$$(15') \quad 2i(-1)^1 N_s^v N_s^v (S_{-i\lambda_s}^v - S_{-i\lambda_s}^v) = -\frac{1}{i\lambda_s} \int_0^\infty (U - V) Y_s dr,$$

(where $S_{-i\lambda_s}^v = 0$).

We can now prove the following statement. If U and V have the same set of eigenvalues $-\lambda_\sigma^2$ and the difference

$$(16) \quad U - V = \sum_{\lambda_\sigma} a_\sigma Z'_\sigma,$$

(5) Cf. L. HULTHÉN: *Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Förh.*, **14**, n. 8 (1944).

where a_σ are arbitrary constants, U and V are phase equivalent potentials.

Introducing (16) into (15) we find according to (11),

$$(17) \quad S_k^U = S_k^V,$$

and according to (13), (15') is automatically fulfilled (with $S_{-i\lambda_\sigma}^U = S_{-i\lambda_\sigma}^V = 0$).

On the other hand supposing that $U(r)$ and $V(r)$ are two phase equivalent potentials and with the same eigenvalues, we might try to expand

$$(18) \quad U - V = \int_0^\infty a_k Z'_k dk + \sum_{\lambda_\sigma} a_\sigma Z'_\sigma.$$

Insertion into (15) and (15') gives $a_k = 0$, while the a'_σ s are left undetermined. Thus, accepting the validity of the expansion (18), (which, however, depends on the completeness of the system Z'_k, Z'_σ), we should get the result, that the difference between two phase-equivalent potentials is always of the form (16).

This may be illustrated on the example given by BARGMANN⁽⁶⁾ with one discrete eigenvalue.

The two potentials

$$U = 24\lambda^2 \frac{\exp[-2\lambda r]}{(1 + 3 \exp[-2\lambda r])^2} \quad \text{and} \quad V = 6\lambda^2 \frac{\exp[-\lambda r]}{(1 + \exp[-\lambda r])^2},$$

give (for $l=0$) two solutions to the Schrödinger equation (1), (1') with the same phases and the same eigenvalue $k^2 = -\lambda^2/4$. Using Bargmann's formulae we get

$$u_1\left(-i\frac{\lambda}{2}, r\right) = \exp[-(\lambda/2)r] \frac{1 - \exp[-2\lambda r]}{1 + 3 \exp[-2\lambda r]},$$

$$v_1\left(-i\frac{\lambda}{2}, r\right) = \exp[-(\lambda/2)r] \frac{1 - \exp[-\lambda r]}{(1 + \exp[-\lambda r])^2};$$

i.e. (apart from a factor)

$$\begin{aligned} Z_{-i\lambda/2}(r) &= u_1\left(-i\frac{\lambda}{2}, r\right) \cdot v_1\left(-i\frac{\lambda}{2}, r\right) = \\ &= \exp[-\lambda r] \frac{(1 - \exp[-\lambda r])^2}{(1 + 3 \exp[-2\lambda r])(1 + \exp[-\lambda r])} = \\ &= -\frac{2 \exp[-2\lambda r]}{1 + 3 \exp[-2\lambda r]} + \frac{\exp[-\lambda r]}{1 + \exp[-\lambda r]}. \end{aligned}$$

(6) V. BARGMANN: *Phys. Rev.*, **75**, 301 (1949).

Differentiating we find,

$$Z'_{-i\lambda/2}(r) = \lambda \left(\frac{4 \exp[-2\lambda r]}{(1 + 3 \exp[-2\lambda r])^2} - \frac{\exp[-\lambda r]}{(1 + \exp[-\lambda r])^2} \right) = -\frac{1}{6} \lambda (U(r) - V(r)).$$

in agreement with (16).

We will consider closer the case when there exists only one eigenvalue, $k^2 = -\lambda_s^2$.

Suppose we know the function $S_k = \exp[2i\eta_k]$, and that we have in some way succeeded in constructing a potential $U(r)$ which through equation (1) defines a function $u_{1_k}(r)$ with the same asymptotic phases η_k . Owing to the existence of a bound state, however, there exist other potentials $V(r)$, defining other functions $v_{1_k}(r)$ with the same phases. The difference $U(r) - V(r)$ should, however, according to (16) be of the form $a_s Z'_s$, where a_s is an undetermined constant. The function $v_{1_s}(r)$ entering into Z_s is really not known, but can be expressed in terms of $u_{1_s}(r)$.

In a manner quite analogous to the deduction of (14) we find (using the discrete eigenfunctions),

$$[v_{1_s} u'_{1_s} - u_{1_s} v'_{1_s}]_0^r = - \int_0^r (U - V) u_{1_s} v_{1_s} dr = - a_s \int_0^r Z'_s(r) u_{1_s}(r) v_{1_s}(r) dr.$$

According to (5), $Z'_s(r) = -2i(u_{1_s}(r)v_{1_s}(r))'$. As we have no contribution from the lower limit:

$$v_{1_s}(r)u'_{1_s}(r) - u_{1_s}(r)v'_{1_s}(r) = 2ia_s \int_0^r (u_{1_s}v_{1_s})'(u_{1_s}v_{1_s}) dr = ia_s \cdot (u_{1_s}(r)v_{1_s}(r))^2,$$

i.e.

$$v_{1_s}^2(r) \left(\frac{u_{1_s}(r)}{v_{1_s}(r)} \right)' = ia_s (u_{1_s}(r)v_{1_s}(r))^2; \quad \left(\frac{u_{1_s}(r)}{v_{1_s}(r)} \right)' = ia_s u_{1_s}^2(r).$$

Integrating we obtain,

$$(20) \quad \frac{u_{1_s}(r)}{v_{1_s}(r)} - \frac{u_{1_s}(\infty)}{v_{1_s}(\infty)} = ia_s \int_0^r u_{1_s}^2(\varrho) d\varrho; \quad \frac{u_{1_s}(r)}{v_{1_s}(r)} - \frac{N_s^U}{N_s^V} = -ia_s \int_r^\infty u_{1_s}^2(\varrho) d\varrho.$$

This gives

$$(21) \quad v_{1_s}(r) = \frac{u_{1_s}(r)}{N_s^U/N_s^V - ia_s \int_r^\infty u_{1_s}^2(\varrho) d\varrho},$$

(a_s is an imaginary quantity, which as Z'_s according to our definition is also purely imaginary makes the difference $U - V$ real).

But $\int_0^\infty v_{1s}^2(r) dr = 1$; thus we must have

$$1 = \int_0^\infty \frac{u_{1s}^2(r) dr}{(N_s^U/N_s^V - ia_s \int_r^\infty u_{1s}^2(\varrho) d\varrho)^2} = \int_0^1 \frac{dz}{(N_s^U/N_s^V - ia_s z)^2} = \frac{1}{ia_s} \left[\frac{1}{N_s^U/N_s^V - ia_s z} \right]_0^1,$$

with $z = \int_r^\infty u_{1s}^2(\varrho) d\varrho$.

Thus

$$(22) \quad N_s^U/N_s^V (N_s^U/N_s^V - ia_s) = 1.$$

Choosing instead of a_s , N_s^V as our undetermined constant we obtain finally

$$(23) \quad v_{1s}(r) = \frac{u_{1s}(r)}{N_s^U/N_s^V \int_0^r u_{1s}^2(\varrho) d\varrho + N_s^V/N_s^U \int_r^\infty u_{1s}^2(\varrho) d\varrho},$$

which introduced into (16) expresses $U(r) - V(r)$ in terms of the «known» functions $u_{1s}(r)$ and the arbitrary constant N_s^V .

Note added in proof. After this work was finished, I got knowledge of a manuscript by JOST-KOHN, who have invented a new method for constructing the potential from the phase shift. This method can be applied also in the case when bound states exist, but then only one of the possible potentials is obtained. Further a proof is given that the potential is uniquely determined by the phase shift, the energies of the bound states and a number of parameters depending on the wave functions for the bound states.

RIASSUNTO

Si mostra che la impossibilità di determinare il potenziale di interazione tra due particelle dalle fasi asintotiche, quando si sia in presenza anche di stati legati, proviene dal fatto che non è possibile estendere le relazioni di ortogonalità di FRÖBERG e HYLLERAAS al caso di autofunzioni discrete. Si mostra poi che tutti i potenziali la cui differenza ha la forma (16) sono equivalenti rispetto alle fasi. Se si conosce un potenziale e la sua autofunzione discreta, la (23) dà la possibilità di esprimere l'autofunzione dell'altro potenziale equivalente in termini della prima funzione. In questo modo è possibile infine costruire esplicitamente le espressioni $U - V$ (pag. 511), contenenti una costante indeterminata (per il caso in cui esista un solo stato legato).

NOTE TECNICHE

Photometric Measurements of Tracks in Nuclear Emulsions.

M. DELLA CORTE and M. RAMAT

Istituto di Fisica dell'Università - Firenze

(ricevuta il 2 Maggio 1952)

Summary. — The blackening of low-energy tracks in nuclear emulsions is determined by a photometric method. Results are discussed and it is shown how a value for the resolved track area may be obtained. Finally it is shown that by an appropriate analysis of photometric profiles, corresponding to slits of increasing width, the error introduced by the light scattered in the emulsion may be eliminated.

The well-known experimental difficulty of identifying low-energy particles in electron sensitive emulsions, is due to the fact that their tracks are « black », i.e., tracks which cannot be identified, with fair certainty, by an estimate of their grain density. If the track is sufficiently long, the identification may be carried out by measuring its gap density, or by combined measurements of scattering-range. But for tracks whose length does not exceed a few hundred μ , no reliable results can be expected from the use of such methods as mentioned above. For this reason, we have considered the opportunity of developing a photometric method by which tracks may be identified.

An attempt along this line has already been made by S. VON FRIESEN and K. KRISTIANSSON ⁽¹⁾, who measured the integrated blackening of tracks over a range of 400 μ from their end. From the values obtained, they could distinguish α -particles from protons or mesons, not, however, from deuterons or tritons.

In our apparatus, the track is set parallel to a slit, which lies in the focal plane of the objective. Light, passing through this slit, falls on the cathode of a photo-multiplier tube (931-A), whose output current is therefore proportional to the luminous flux issuing from the slit.

This current, duly amplified, is sent to a short-period galvanometer; the ensuing deflections are registered photographically. An appropriate mechanical contrivance causes the sensitive paper to slide, and is so devised as to

⁽¹⁾ S. VON FRIESEN and K. KRISTIANSSON: *Nature*, **166**, 686 (1950).

ensure strict proportionality between the displacements of the paper, and the movements of the stage.

While our method was being developed, M. CECCARELLI and G. T. ZORN ⁽²⁾, and G. KAYAS and D. MORELLET ⁽³⁾, have published experimental results obtained by using a technique essentially similar to ours.

According to VON FRIESEN and KRISTIANSSON, the obscuration produced by a track may be evaluated by measuring the ratio $(I' - I'')/I'$, where I'' and I' are the values of the luminous flux (or the corresponding galvanometer deflections, which are proportional to them) passing through the slit, when the image of the track is contained in its area, and when it is not.

This ratio, which for slits whose width is greater than that of the track, is shown to be equal to the ratio of the resolved total area of the track and the area of the slit, does not vary, as long as the slit is sufficiently narrow.

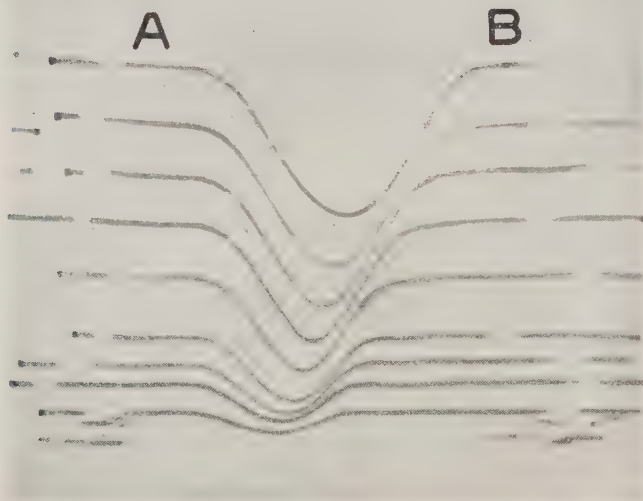


Fig. 1. — Photometric profiles of a track obtained with slits of increasing width from 0.08μ to 1.44μ .

In good agreement with the results of CECCARELLI and ZORN, however, we have found that the obscuration depends, not only on the intrinsic characteristics of the track, but also on the depth of the track in the emulsion. The latter result is primarily due to light scattered by the background grains

⁽²⁾ M. CECCARELLI and G. T. ZORN: *Phil. Mag.*, **43**, 356 (1952).

⁽³⁾ G. KAYAS and D. MORELLET: *Compt. Rend.*, **234**, 1359 (1952).

in the layer of emulsion above the track, and also by the emulsion itself (this effect may be more or less relevant, according to the plate-fixing process having been more or less prolonged). As a consequence, single grains do not show up as perfectly black, but, for photometric purposes, behave as semi-transparent. It is extremely difficult to introduce an appropriate correction to account for this effect, as the scattering of light differs noticeably from one point of the plate to another. For this reason, CECCARELLI and ZORN, who have applied the photometric method to the analysis of tracks by heavy nuclei, have chosen, as a significant quantity, rather than the obscuration, the shape of the photometric profile, which is closely related to the number and energy of δ -ray tracks.

KAYAS and MORELLET (⁴), on the other hand, consider that the above effect may be corrected, by assuming it to be linearly related to the depth of the track in the emulsion.

Since in the case of particles of charge one, and mass of the order of the proton mass, an analysis of photometric profiles is hardly possible, we developed the following method of analysis by which we hope to be able to identify much shorter tracks even in the case of protons, alphas and mesons.

For a certain section of the track, photometric profiles are registered with slits of increasing width, i.e., from 0.08 up to 1.9 μ , and length of 31.2 μ (values are referred to the object plane). Typical forms of such profiles are shown in fig. 1. If we plot the deflections I' and I'' of the galvanometer against corresponding values of the slit opening, it is evident that, while the value of I' will be proportional to the width of the slit, I'' ought to be zero until the slit is narrower than the core of the track. Once the slit is wider than this core, I'' increases with increasing width of the slit, though, in general, not linearly, as the edges of the track are far from sharp, until a point is reached, when the slit is wide enough to contain the whole area of the track which is being investigated. From this point onward, the I'' graph becomes linear, and parallel to the I' graph.

Actually, as there may be discontinuities (gaps) in the tracks, and as the scattering of light prevents the grains from appearing perfectly black, we may expect that I'' differ from zero, even when the slit is very narrow. As a matter of fact this point of view is supported by the experimental results, as it appears from the typical diagram of fig. 2.

As one might expect, the first part of the I'' graph is linear; in fact for small values of gap density, the gap edges may be roughly approximated to two short, parallel lines. Moreover, as long as the image of the

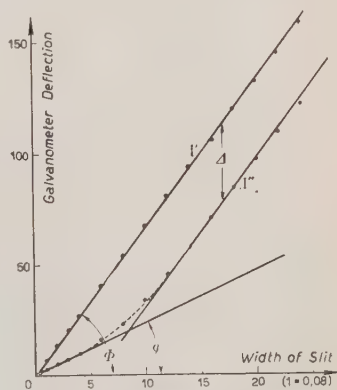


Fig. 2. - Diagram of galvanometer deflections. I' mean of deflections in the limits of the profile. I'' minimum of the profile.

(⁴) A private communication received from D. MORELLET informs us that this correction was determined experimentally, by measurements on tracks whose length exceeded 20 000 μ .

track covers the slit entirely, the luminous flux passing through the slit, owing to the scattering of light, increases linearly with increasing width.

On the other hand, in our apparatus, the gap density can be measured directly, by observing the track through the slit. A consideration of the slope of the first part of the curve thus enables us to figure out the true obscuration, and the correct value for the projected area of the track.

Let l and L be the width and the length of the slit; then

$$(1) \quad \frac{1}{L} \operatorname{tg} \Phi = \frac{dI'}{d(Ll)}$$

is proportional to the luminous flux through unit area of slit. We shall call this ratio « background luminosity ».

If we now consider a slit, narrow enough to be completely covered by the image of the core of the track, and call f the fraction of L occupied by gaps, we have

$$(2) \quad \frac{1}{L} \operatorname{tg} \varphi = f \frac{1}{L} \operatorname{tg} \Phi + (1-f)\sigma,$$

where σ is the luminosity of the track, i.e., the luminous flux per unit area of track. Were it not for the effect due to the scattering of light, σ ought to be zero.

Let us now consider the distance Δ between two parallel parts of the I' and I'' graphs, measured on the I axis. If s is the area of the track contained in the slit, we have

$$(3) \quad \Delta = s \left(\frac{\operatorname{tg} \Phi}{L} - \sigma \right),$$

and therefore, from (2) and (3),

$$s = \Delta L \frac{1-f}{\operatorname{tg} \Phi - \operatorname{tg} \varphi}.$$

Since Δ , as above defined, corresponds to a width of the slit greater than the width of the track, s is a quantity, characteristic of the track, and independent of experimental conditions.

As is readily seen, it is possible to obtain by this method an experimental correction of the scattering effect for each section of the track.

An alternative method of evaluating the obscuration, consists in measuring the area S which is delimited by the photometric profile and the AB line, drawn between its limits (fig. 1). This area is proportional to the area of the slit; in fact, the experimental values of S plotted against the values of the slit lie on a straight line through the origin. The linearity of the $S(a)$ curve may be a criterion for judging whether, following the widening of the slit, an agglomeration of background grains has been eventually included, so as to alter the value of the obscuration.

Conditions to be satisfied for this method of evaluating true obscuration to be applicable are:

a) the part of the track investigated must be straight and perfectly parallel to the slit;

b) the track must contain only a small number of gaps.

The method outlined above has the advantage that the measurements and calculations involved are fairly rapid; it is now being applied to a systematic study of low-energy tracks observed in evaporation processes.

We thank Prof. FRANCHETTI, Director of this Institute for his stimulating interest and useful suggestions; and Dr. L. RONCHI for her kind help.

The loan of a microscope by Prof. N. BECCARI, Director of the Institute of Anatomy is also gratefully acknowledged.

— —

RIASSUNTO

L'annerimento di tracce prodotte in emulsioni nucleari G 5 da particelle di bassa energia è stato misurato con un dispositivo fotometrico. Spostando una fenditura normalmente alla direzione della traccia è possibile determinare il profilo fotometrico di questa. Si discutono i risultati che si ottengono dall'insieme di più profili di una stessa traccia ottenuti con fenditure di larghezza crescente e si dimostra come sia possibile ottenere da questi dati una correzione per l'effetto di diffusione della luce da parte dell'emulsione.

Sulla rivelazione di sciami di particelle mediante contatori a scintillazione. (*)

R. ASCOLI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 16 Maggio 1952)

Riassunto. — Si mostra che i contatori a scintillazione sono particolarmente adatti per rivelare sciami di anche poche particelle veloci che li attraversino e possono quindi sostituire apparecchi di coincidenza. Si descrivono esperienze eseguite sui raggi cosmici, che confermano tale possibilità: sovrapponendo a un contatore a scintillazione un assorbitore di Pb (15 g/cm^2) si è infatti rilevato un forte aumento nella frequenza degli impulsi più alti, che viene attribuito alla produzione di cascate di elettroni e fotoni nel Pb, da parte della componente molle dei raggi cosmici. Con assorbitore di acqua (15 g/cm^2) l'aumento è risultato molto minore.

È noto che uno sciame sufficientemente numeroso di particelle veloci che attraversi una camera di ionizzazione produce una brusca variazione del potenziale dell'elettrodo collettore. Tuttavia, la camera di ionizzazione è poco adatta per la rivelazione degli sciami di particelle veloci, perchè occorre che queste siano assai numerose per produrre effetti rivelabili e paragonabili a quelli che può produrre anche una sola particella fortemente ionizzante. Ciò per la piccola perdita di energia delle particelle veloci nella materia sensibile della camera di ionizzazione, che è allo stato gassoso. Tale perdita è molto maggiore nei contatori a scintillazione, dove la sostanza sensibile è allo stato condensato. Per questo ho pensato alla possibilità di utilizzarli per rivelare sciami di anche poche particelle veloci che li attraversino. È a tale scopo vantaggioso scegliere spessori forti per la sostanza fluorescente. Nel contatore da me usato lo spessore corrisponde a $2,5 \text{ g/cm}^2$ di xilene: una particella relativistica di carica

(*) Lavoro svolto presso l'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino.

elettronica proveniente in direzione verticale vi perderebbe in media circa 4 MeV, un mesone lento al più circa 17 MeV, un protone al più circa 45 MeV ⁽¹⁾.

Descrizione del dispositivo usato.

Il rivelatore (fig. 1) è costituito da una vaschetta di vetro cilindrica di 100 cm² di superficie, contenente uno spessore di 3 cm di soluzione al 2 ‰ di α -naftilamina in xilene ⁽²⁾, sotto la quale è posto un fotomoltiplicatore

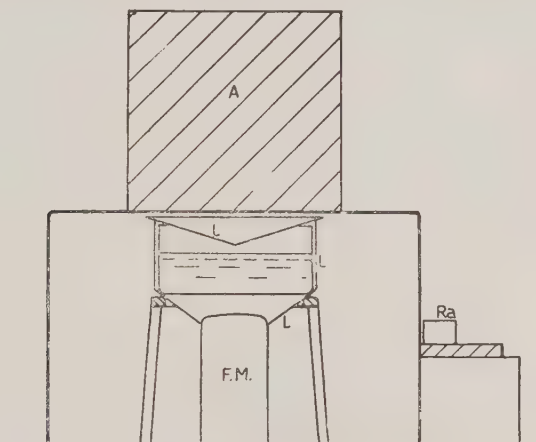


Fig. 1. - Schema del dispositivo sperimentale.

5819 (F.M.). La vaschetta è racchiusa in un involucro *L* rivestito di foglia di alluminio speculare, che la collega al fotocatodo, permettendo di raccogliere una maggior quantità di luce, con un vantaggio che si è constatato essere dell'ordine del 100%. Si raggiunge così anche lo scopo di raccogliere la luce con una certa uniformità dai vari punti del liquido.

In prove preliminari si è constatata la difficoltà di ottenere misure riproducibili a causa della variabilità del fotomoltiplicatore. Per evitare l'inconveniente ho studiato uno speciale stabilizzatore automatico di sensibilità che utilizza la costanza di emissione radioattiva di un preparato di radio (Ra) mantenuto costantemente in vicinanza dell'apparecchio. Gli impulsi provenienti dal fotomoltiplicatore, la cui tensione di alimentazione è stata in media di 1110 V, sono stati derivati con costante di tempo di 0,3 μ s, e amplificati 80 volte. Per poter effettuare le misure in breve tempo migliorando così la

⁽¹⁾ Si vede da questi dati come con una opportuna discriminazione si possano evitare gli effetti di contaminazione radioattiva senza impedire la rivelazione degli sciami.

⁽²⁾ Si è usata α -naftilamina commerciale. Si sono eseguite prove di confronto con il prodotto purificato senza riscontrare alcun vantaggio.

precisione, ho utilizzato un registratore di impulsi a nastro telegrafico che permette di conoscere l'altezza di ogni impulso arrivato, superiore ad un valore di soglia.

Misure effettuate e discussione dei risultati.

Si è eseguita la determinazione dello spettro integrale degli impulsi prodotti dal contatore a scintillazione: 1) in assenza di assorbitori; 2) sovrapponendo un assorbitore *A* costituito da uno spessore di 15 cm di acqua contenuto in un recipiente del diametro di 16 cm; 3) sovrapponendo un assorbitore formato da dischi di piombo distanziati, dello stesso diametro e di spessore complessivo corrispondente a 15 g/cm² come per l'acqua, in modo da realizzare approssimativamente la stessa disposizione geometrica.

Gli spettri ottenuti sono rappresentati in fig. 2 e i valori corrispondenti riportati nella tabella I; il diagramma è stato completato nella parte inferiore

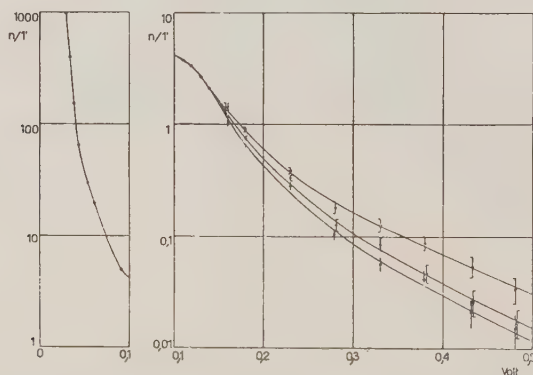


Fig. 2. - Spettri integrali degli impulsi: senza assorbitori (\circ), con piombo (\triangle), con acqua (\square). Ascisse: altezza in volt degli impulsi all'uscita del fotomoltiplicatore; ordinate: numeri di impulsi al minuto primo. Fino all'ascissa 0,15 V i tre spettri sono praticamente coincidenti.

a 0,11 V senza la sopraddeffta stabilizzazione automatica, perchè avrebbe potuto essere influenzato dalla presenza della sostanza radioattiva e in questo tratto è quindi soggetto a incertezze.

Si vede dagli spettri che con l'assorbitore di piombo la frequenza degli impulsi di altezza superiore a 0,15 V circa subisce un aumento che va dal 50 al 100% e più, mentre con l'assorbitore di acqua l'aumento è assai minore.

Gli impulsi per i quali si è verificato l'aumento di frequenza corrispondono a perdite di energia nel liquido fluorescente variabili da almeno 15 a 50 MeV

procedendo dalle ascisse minori alle maggiori ⁽³⁾. Nel caso che siano dovuti a uno sciame di particelle relativistiche, queste dovrebbero attraversare il liquido in numero di da almeno 3 a 8, tenuto conto che generalmente non proverranno dalla direzione verticale.

TABELLA I. — *Frequenza degli impulsi al minuto.*

| Volt | 0,112 | 0,120 | 0,130 | 0,140 |
|------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1) Senza assorbitore . | $3,69 \pm 0,23$ | $3,40 \pm 0,22$ | $2,75 \pm 0,19$ | $2,14 \pm 0,14$ |
| 2) Con l'acqua . . . | $3,78 \pm 0,15$ | $3,52 \pm 0,14$ | $2,63 \pm 0,12$ | $2,10 \pm 0,11$ |
| 3) Col piombo . . . | $3,70 \pm 0,22$ | $3,40 \pm 0,21$ | $2,62 \pm 0,18$ | $2,15 \pm 0,17$ |

| Volt | 0,160 | 0,180 | 0,230 | 0,280 |
|------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) Senza assorbitore . | $1,07 \pm 0,12$ | $0,600 \pm 0,031$ | $0,282 \pm 0,022$ | $0,104 \pm 0,013$ |
| 2) Con l'acqua . . . | $1,44 \pm 0,09$ | $0,755 \pm 0,036$ | $0,333 \pm 0,024$ | $0,130 \pm 0,015$ |
| 3) Col Piombo . . . | $1,44 \pm 0,14$ | $0,910 \pm 0,049$ | $0,395 \pm 0,032$ | $0,183 \pm 0,022$ |

| Volt | 0,330 | 0,380 | 0,430 | 0,480 |
|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) Senza assorbitore . | $0,057 \pm 0,009$ | $0,042 \pm 0,008$ | $0,021 \pm 0,006$ | $0,015 \pm 0,005$ |
| 2) Con l'acqua . . . | $0,086 \pm 0,012$ | $0,047 \pm 0,009$ | $0,026 \pm 0,007$ | $0,017 \pm 0,005$ |
| 3) Col piombo . . . | $0,128 \pm 0,018$ | $0,086 \pm 0,015$ | $0,055 \pm 0,012$ | $0,034 \pm 0,009$ |

L'effetto molto più forte prodotto dal piombo in confronto all'acqua mostra che nel caso del piombo gli eventi sono per la maggior parte cascate di elettroni e fotoni. D'altra parte la loro frequenza non si potrebbe spiegare supponendoli stelle e tanto meno sciami penetranti. Ciò è confermato da esperienze preliminari in cui si è ricavata la curva di transizione per impulsi corrispondenti a circa 0,25 V, facendo variare lo spessore di piombo posto sull'apparecchio (dischi non distanziati); si è ottenuta una «curva di Rossi», con un massimo per 13 mm di piombo.

Quanto al lieve aumento di frequenza negli impulsi più alti prodotto dall'acqua, si pensa sia dovuto prevalentemente ad interazioni nucleari nella massa dell'acqua, che diano luogo a una o più particelle fortemente ionizzanti capaci di perdere nel liquido fluorescente energie variabili da 15 a 50 MeV.

⁽³⁾ Si ottengono tali ordini di grandezza osservando lo spettro in corrispondenza a frequenze dell'ordine di quella delle singole particelle cosmiche che attraversano il contatore a scintillazione ($\sim 71/1\text{min}$): si nota infatti che l'altezza media dell'impulso prodotto da una di tali particelle è al più dell'ordine di $0,04 \div 0,05$ V. Quindi un impulso di $0,04 \div 0,05$ V corrisponde ad una perdita di energia nel liquido fluorescente di almeno 4 MeV, come hanno confermato prove con sostanza radioattiva.

Conclusioni.

Le esperienze fatte dimostrano dunque che l'apparecchio è sensibile al passaggio di uno sciame di anche poche particelle relativistiche. Collegato con un opportuno telescopio può quindi sostituire apparecchi di coincidenza nella selezione di sciami, col vantaggio di essere sensibile anche a quelli più stretti e meno densi.

È notevole che le esperienze si siano potute eseguire senza dispositivi di coincidenza. Questo perchè lo spettro degli impulsi di fondo, esponenziale in un buon fotomoltiplicatore, scende molto più rapidamente di quello degli impulsi utili, per cui il fondo diventa trascurabile nello studio degli eventi energetici, nonostante questi ultimi siano rari.

Ringrazio il prof. PERUCCA per il laboratorio e il materiale messo a disposizione, il prof. WATAGHIN per gli utili suggerimenti e il dott. ROBBA per la sua precedente attività preparatoria.

SUMMARY

It is shown that scintillation counters are particularly apt to reveal showers even when constituted of few fast particles; so they can substitute coincidence devices. Such a possibility is demonstrated by experiences effected on cosmic rays: setting a lead absorber (15 g/cm^2) on a scintillation counter (fig. 1), a great increase in the rate, of the higher pulses was observed (fig. 2): this fact is attributed to electron and photon showers, produced in the lead by cosmic rays' soft component. With a water absorber (15 g/cm^2) the increase was much lesser.

Su un dispositivo per la stabilizzazione dei fotomoltiplicatori. (*)

R. ASCOLI

Istituto di Fisica dell'Università - Torino

(ricevuto il 16 Maggio 1952)

Riassunto. — Si descrive uno speciale stabilizzatore automatico per contatori a scintillazione, che utilizza la costanza di emissione di un preparato radioattivo, allo scopo di eliminare gli inconvenienti derivanti dall'incostanza nel tempo dei fotomoltiplicatori. L'apparecchio ha dato buoni risultati in esperienze sui raggi cosmici.

Una delle principali difficoltà che si incontrano nell'uso dei contatori a scintillazione è dovuta alla incostanza nel tempo dei fotomoltiplicatori. Questo inconveniente rende difficili misure precise soprattutto quando si usi il contatore a scintillazione come rivelatore proporzionale e quando le misure richiedano lunghi periodi di tempo come nel caso di eventi prodotti dai raggi cosmici. Appunto per effettuare misure di tal genere ho realizzato uno stabilizzatore automatico di sensibilità molto semplice, che ha dato buoni risultati.

Il dispositivo è il seguente. In una posizione ben determinata in vicinanza del contatore a scintillazione è posto un preparato radioattivo che emetta con sufficiente costanza raggi γ . Gli impulsi prodotti dal contatore a scintillazione (F.M.) (fig. 1), dopo essere stati opportunamente amplificati (A), sono inviati, oltre che agli apparecchi di registrazione caratteristici dell'esperienza che si esegue (R), ad un circuito tipo « counting rate meter » (C.R.M.). Questo è preceduto da un discriminatore che lascia passare solo gli impulsi di altezza superiore ad un valore prestabilito. La tensione di uscita del C.R.M. è inviata ad un circuito (C) che controlla la tensione di alimentazione del F.M., in modo tale che quando aumenta la frequenza degli impulsi che giungono al C.R.M., viene diminuita la tensione di alimentazione del F.M. e viceversa.

(*) Lavoro svolto presso l'Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino

Lo spettro di impulsi prodotto dai raggi γ del preparato radioattivo presenta una ampia zona assai ripida; il livello di discriminazione del C.R.M. è posto in tale zona; un aumento casuale anche piccolo di amplificazione del

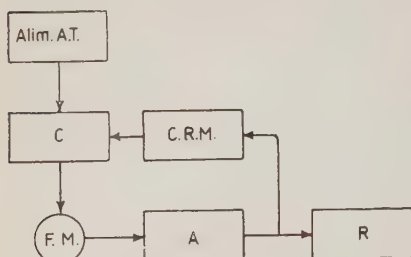


Fig. 1. - Schema di funzionamento del dispositivo: A amplificatore; R apparecchio di registrazione; C.R.M. circuito tipo «counting rate meter»; C circuito di controllo dell'alta tensione.

F.M. e circuiti connessi, fa allora aumentare notevolmente il numero di impulsi la cui altezza supera il livello di discriminazione del circuito C.R.M.; questo genera quindi un segnale di uscita che provoca una diminuzione della tensione di alimentazione del F.M., e quindi della sua amplificazione, fino a farla scendere a un valore molto prossimo a quello iniziale.

Si comprende come la stabilizzazione sia molto buona, data anche la forte variazione di amplificazione del F.M. al variare della tensione di alimentazione. Un dispositivo di tal genere presenta inoltre il vantaggio di non richiedere che la tensione di alimentazione del F.M. sia previamente stabilizzata con i soliti metodi.

Occorre osservare che per un regolare funzionamento è necessario: 1°) che il C.R.M. abbia una costante di tempo molto maggiore dell'intervallo medio tra un impulso e l'altro, per evitare eccessive oscillazioni casuali della tensione di alimentazione del F.M.; 2°) che gli impulsi che pervengono al C.R.M. siano in parte preponderante dovuti al preparato radioattivo e non al fondo (che non è costante nel tempo); 3°) che gli impulsi prodotti dal preparato radioattivo non disturbino l'esperienza che si esegue; nel nostro caso questo era veri-

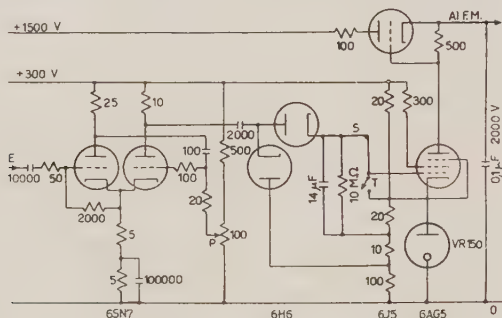


Fig. 2. - Circuito elettronico utilizzato. Gli impulsi provenienti dall'amplificatore vengono inviati in E. La parte di circuito contenente la 6SN7 (multivibratore-discriminatore) e la 6H6 (integratore), funziona da «counting rate meter» e controlla col segnale prodotto (in S) la tensione di alimentazione del fotomoltiplicatore attraverso la parte rimanente del circuito (C della fig. 1). Dove non è altrimenti specificato, le resistenze sono espresse in $k\Omega$ e le capacità in pF .

ficato perchè interessavano solo impulsi prodotti da raggi cosmici, di altezza molto superiore a quelli della sostanza radioattiva; 4°) occorre che gli impulsi che si studiano siano di frequenza sufficientemente bassa in confronto a quelli prodotti dal preparato radioattivo, per evitare che le loro variazioni di frequenza provochino, a causa del dispositivo stesso, variazioni di sensibilità del F.M.

Il circuito utilizzato è rappresentato in fig. 2. Il livello di discriminazione è regolabile col potenziometro P ed è dell'ordine di alcuni Volt. Se si vuole evitare che all'atto dell'accensione il F.M. venga assoggettato a tensioni superiori alla normale, conviene mantenere l'interruttore T chiuso fino a che il C.R.M. e l'amplificatore siano pronti a funzionare. In tale posizione la tensione viene mantenuta ad un valore fisso di alcune centinaia di Volt.

Lo stabilizzatore descritto è stato usato nella misura di frequenze di eventi prodotti dai raggi cosmici ⁽¹⁾: le fluttuazioni si sono mantenute entro i limiti normali, al contrario di quanto avveniva prima dell'introduzione dello stabilizzatore. Inoltre si è constatata una molto maggiore costanza nella frequenza degli impulsi di una data altezza prodotti dal preparato radioattivo, indipendentemente dal tempo di accensione del F.M. e da giorno a giorno. Le variazioni massime di frequenza riscontrate corrisponderebbero, in base allo spettro degli impulsi prodotti dal preparato radioattivo, a variazioni di $\pm 1,5\%$ nell'amplificazione del F.M..

Ringrazio il prof. PERUCCA per il laboratorio e il materiale messo a disposizione.

(¹) R. ASCOLI: *Nuovo Cimento*, **9**, 520 (1952).

SUMMARY

A special automatic stabilizer for scintillation counters is described: the constance of emission of a radioactive source is used to eliminate the troubles deriving from the unsteadiness of photomultipliers with time. The device has given good results in experiments on cosmic rays.

Misure di conducibilità in alta frequenza con soluzioni viscosi.

A. CARRELLI e L. RESCIGNO

Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 17 Maggio 1952)

Riassunto. — Sono state fatte misure di conducibilità in alta frequenza ($\omega = 8,79 \cdot 10^8$) di soluzioni di KCl in solventi viscosi, mediante determinazione del massimo della corrente di risonanza. Non è stata trovata, col metodo usato, quella cospicua differenza tra la conducibilità delle soluzioni in esame in bassa frequenza e quella in alta frequenza, come altri Autori avevano affermato.

L'uguaglianza, per un solvente di un elettrolito, fra il valore del coefficiente di viscosità η misurato con il tubo di Poiseuille e quello che compare nelle equazioni di moto degli ioni, è ammessa come concetto fondamentale nella teoria di Debye, della formazione di una nuvola ionica quale conseguenza dell'azione elettrostatica fra gli ioni dell'elettrolito. Ma una verifica diretta di tale ammissione si presenta difficile: si può però, per uno stesso elettrolito disciolto in solventi diversi, dimostrare che il prodotto della conducibilità Λ per il coefficiente di viscosità η è costante, e ciò in bassa frequenza. Passando al campo delle alte frequenze alcuni Autori ⁽¹⁾ trovarono una diversità notevole (1000 %) fra il valore della conducibilità di una soluzione viscosa a bassa frequenza e quello misurato a frequenza alta ($\nu = 20$ MHz) e da ciò trassero la conclusione che, allorché l'ione compie un moto armonico di frequenza alta, il coefficiente η del liquido in cui è l'ione è diverso da quello che si può misurare a frequenza quasi nulla.

Noi già in un precedente lavoro (*Nuovo Cimento*, **8**, 308 (1951)) abbiamo riferito di alcune misure di conducibilità con soluzioni di KCl in liquidi viscosi, con un metodo di determinazione del massimo della corrente di risonanza di un oscillatore la cui pulsazione era $\omega = 4,39 \cdot 10^7$. Non avendo trovato sensibile diversità fra la conducibilità delle soluzioni in questione misurata a 7 MHz e quella misurata a frequenza vicina a zero, (le variazioni non arrivavano al 10 %), concludemmo che l'effetto vistoso, da altri annunciato, non era da noi riscontrato, per lo meno con il metodo usato.

⁽¹⁾ H. FALKENHAGEN: *Erg. der ext. Naturw.*, **14**, 130 (1935); H. GARTNER: *Phys. Zeits.*, **32**, 919 (1931).

Riferiamo ora i risultati, relativi ad un secondo ciclo sperimentale, ottenuti sullo stesso argomento, adoperando l'identico metodo (determinazione del massimo di risonanza) delle misure di conducibilità dello stesso sale nei solventi viscosi già precedentemente scelti, ma con un oscillatore di frequenza molto più elevata del precedente ($\omega = 8,79 \cdot 10^8$). Anche questa volta la taratura del circuito oscillante veniva fatta con soluzioni di KCl in acqua, aventi Δ nota perchè misurata al ponte di Kohlrausch. La fig. 1 mostra una curva di taratura, ottenuta riportando sulle ascisse i valori delle resistenze delle soluzioni al ponte, e sulle ordinate le rispettive intensità massime di corrente. Quindi veniva posta nel circuito ad altissima frequenza la soluzione viscosa e veniva letta la corrispondente intensità massima di corrente. Dalla curva di taratura se ne ricavava il valore R_ω e si poteva così confrontare tale valore con quello, R_0 , di tale soluzione viscosa, misurato al ponte di Kohlrausch. I solventi adoperati erano: glicerina, etilpoliglicolo, igepal C, dispersal O, in cui veniva disciolta una soluzione acquosa di KCl e le soluzioni avevano rispettivamente i seguenti coefficienti di viscosità: glicerina $4,7 \cdot 10^{-2}$; etilpoliglicolo $3,6 \cdot 10^{-2}$; igepal C $3,1 \cdot 10^{-2}$; dispersal O $1,8 \cdot 10^{-2}$ e molarità circa 0,1.

Adoperando la pulsazione $\omega = 8,79 \cdot 10^8$ si nota effettivamente una diversità fra le due conducibilità delle soluzioni viscosi, ma tale diversità, che è, con il metodo attuato, ancora nei limiti dell'errore sperimentale, non ci consente di annunciare che l' η macroscopico, cioè quello del tubo di Poiseuille, è diverso dall' η microscopica, cioè dal coefficiente di viscosità nella equazione di moto degli ioni.

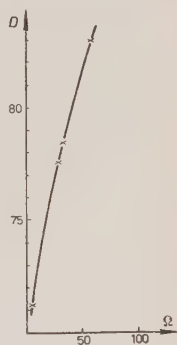


Fig. 1.

| Solvente | η | $(R_\omega - R_0)/R_0$ |
|-------------------|---------------------|------------------------|
| Glicerina - acqua | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | + 0,177 |
| Igepal C | $3,0 \cdot 10^{-2}$ | + 0,143 |
| Etilpoliglicolo | $3,6 \cdot 10^{-2}$ | - 0,070 |
| Dispersal O | $1,8 \cdot 10^{-2}$ | + 0,160 |

SUMMARY

Measurements of conductivity have been made at high frequency ($\omega = 8,79 \cdot 10^8$) with KCl solutions in liquids of considerable viscosity, by the determination of maximum of resonance current. By the employed method A.A. did not find that conspicuous difference between the conductivity of the examined solutions at low frequency and their conductivity at high frequency, that, on the contrary, other A. had observed.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Théorie mécanique de la diffusion des particules par des réseaux.

F. J. WIŚNIEWSKI

Lodz (Pologne)

(ricevuto il 27 Maggio 1952)

Dans un article antérieur (*) on a déduit les formules de Laue relatives à la diffusion des particules par des plans du réseau cristallin en repos par les moyens de la mécanique classique corpusculaire.

Maintenant on passera au même problème dans l'hypothèse que les plans du réseau soient en mouvement, par exemple en mouvement vibratoire contraint ou bien spontané (mouvements thermiques).

En désignant par x, y, z , les coordonnées courantes sur le plan et par $\bar{x}(t), y(t), z(t)$ les coordonnées d'un point fixe du plan qui se déplace dans l'espace, l'équation du plan du réseau cristallin s'écrit:

$$(1) \quad [\sum k_e b_{ex}] \cdot [x - \bar{x}(t)] + [\sum k_e b_{ey}] \cdot [y - \bar{y}(t)] + [\sum k_e b_{ez}] \cdot [z - \bar{z}(t)] = 0,$$

b_1, b_2, b_3 sont les vecteurs du réseau inverse et k_1, k_2, k_3 des nombres entiers.

En désignant par E'' et p'' l'énergie totale et la quantité de mouvement de la particule immédiatement après le choc avec une particule du réseau et par E' et p' les mêmes grandeurs immédiatement avant le choc, on a, conformément au principe de Hamilton, la condition suivante à remplir:

$$(2) \quad [E'' - E'] \delta t + [p''_x - p'_x] \delta x + [p''_y - p'_y] \delta y + [p''_z - p'_z] \delta z = 0,$$

où $\delta x, \delta y, \delta z$, sont des variations qui doivent satisfaire à l'équation:

$$(3) \quad [\sum k_e b_{ex}] \delta x + [\sum k_e b_{ey}] \delta y + [\sum k_e b_{ez}] \delta z - \\ - \{ [\sum k_e b_{ex}] v_x + [\sum k_e b_{ey}] v_y + [\sum k_e b_{ez}] v_z \} \delta t = 0.$$

que l'on obtient en prenant la variation de (1) et remarquant que

$$\delta \bar{x}(t) = v_x \delta t, \quad \delta \bar{y}(t) = v_y \delta t, \quad \delta \bar{z}(t) = v_z \delta t.$$

(*) F. J. WIŚNIEWSKI: *Nuovo Cimento*, **9**, 186 (1952).

En appliquant aux équations (2) et (3) la méthode des coefficients indéterminés on obtient les relations cherchées

$$(4a) \quad E'' - E' = \hbar \left\{ [\sum k_{\varrho} b_{\varrho x}] v_x + [\sum k_{\varrho} b_{\varrho y}] v_y + [\sum k_{\varrho} b_{\varrho z}] v_z \right\},$$

$$(4b) \quad \begin{cases} p''_x - p'_x = \hbar [\sum k_{\varrho} b_{\varrho x}], \\ p''_y - p'_y = \hbar [\sum k_{\varrho} b_{\varrho y}], \\ p''_z - p'_z = \hbar [\sum k_{\varrho} b_{\varrho z}]. \end{cases}$$

E est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle U

$$E'' = T'' + U'', \quad E' = T' + U'.$$

Or, au point (x, y, z) :

$$U''(x, y, z) = U'(x, y, z),$$

donc

$$E'' - E' = T'' - T',$$

et l'équation (4a) s'écrit:

$$(4a\text{-bis}) \quad T'' - T' = \hbar \left\{ [\sum k_{\varrho} b_{\varrho x}] v_x + [\sum k_{\varrho} b_{\varrho y}] v_y + [\sum k_{\varrho} b_{\varrho z}] v_z \right\}.$$

En éliminant les vecteurs b_1, b_2, b_3 du réseau inverse entre les équations (4a-bis) et (4b) on obtient:

$$(5) \quad T'' - p''v \cos(p'', v) = T' - p'v \cos(p', v).$$

L'équation (5) conduit, si on l'applique aux photons, à une relation connue qui exprime l'influence du mouvement d'une surface réfléchissante sur la fréquence de la lumière réfléchie. Posons

$$T'' = \hbar \nu'', \quad T' = \hbar \nu', \quad p'' = \frac{\hbar \nu''}{c}, \quad p' = \frac{\hbar \nu'}{c},$$

alors (5) s'écrit:

$$\nu'' \left[1 - \frac{v}{c} \cos(p'', v) \right] = \nu' \left[1 - \frac{v}{c} \cos(p', v) \right].$$

On obtient ainsi par des raisonnements corpusculaires la relation déduite par des raisonnements ondulatoires.

En désignant par n le diviseur commun entier des nombres entiers k_1, k_2, k_3

$$k_{\varrho} = n j_{\varrho}, \quad (\varrho = x, y, z)$$

puis posant:

$$\sum j_{\varrho} b_{\varrho x} = w_x, \quad \sum j_{\varrho} b_{\varrho y} = w_y, \quad \sum j_{\varrho} b_{\varrho z} = w_z,$$

les équations (4b) et (4a-bis) s'écrivent

$$(6) \quad \begin{cases} v'' = v' - n(w, v), \\ v'' \alpha_x'' - v' \alpha_x' = w_x \cdot n, \\ v'' \alpha_y'' - v' \alpha_y' = w_y \cdot n, \\ v'' \alpha_z'' - v' \alpha_z' = w_z \cdot n, \end{cases}$$

où $\alpha_x'', \alpha_y'', \alpha_z''$ désignent les cosinus directeurs de p'' et $\alpha_x', \alpha_y', \alpha_z'$ ceux de p' .

Les équations (6) régissent le mouvement des photons réfléchis sur des surfaces du réseau cristallin en mouvement

En éliminant v' entre les relations (6) on obtient :

$$(6a) \quad \alpha_s'' \{ v' + n(w, v) \} = v' \alpha_s' + n w_s,$$

où $s = x, y, z$.

A partir de (6a) on obtient pour l'angle ϑ entre la direction du mouvement de la particule incidente et la direction de cette particule après diffusion, l'expression suivante :

$$(7) \quad 2 \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{nw}{v'} \sqrt{\frac{1 - (w, v)/w^2}{1 + n(w, v)/v'}} ,$$

qui remplace celle de Bragg.

Si les plans du réseau cristallin effectuent des mouvements vibratoires autour de leurs positions d'équilibre, la vitesse v varie entre deux valeurs extrêmes $-v_0$ et $+v_0$. La déviation est comprise entre deux valeurs extrêmes :

$$(7a) \quad \frac{nw}{v'} \sqrt{\frac{1 - (w, v_0)/w^2}{1 + n(w, v_0)/v'}} \leq 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \leq \frac{nw}{v'} \sqrt{\frac{1 - (w, v_0)/w^2}{1 - n(w, v_0)/v'}} .$$

Les mouvements pendulaires des plans du réseau élargissent les faisceau réfléchis. Ces mouvements peuvent être provoqués par des oscillations élastiques ainsi que par des oscillations thermiques.

Si l'on traite la diffusion du point de vue de la mécanique classique on doit poser :

$$T'' = \frac{(p'')^2}{2m}, \quad T' = \frac{(p')^2}{2m} .$$

En introduisant ces expressions dans (4a) on trouve :

$$(p'')^2 = (p')^2 + 2mn\hbar[w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z] .$$

A partir de (4b) on obtient :

$$(8) \quad \alpha_s'' = \alpha_s' \left[1 + 2m\hbar n \frac{(w, v)}{p'^2} \right]^{-1/2} = \frac{\hbar}{p'} w_s \left[1 + 2m\hbar n \frac{(w, v)}{p'^2} \right]^{-1/2} ,$$

où $s = x, y, z$.

Pour l'angle ϑ entre la direction du mouvement de la particule incidente et la

direction du mouvement de la particule diffusée on obtient, à partir de (8):

$$(9) \quad 2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{whn}{p'} \sqrt{\frac{1 + 2\{p'^2 + mhn(w, v) \frac{p' \sqrt{p'^2 + 2mhn(w, v)}}{\sqrt{1 + 2mhn(w, v)/p'^2}}\}}{w^2 h^2 n^2}}.$$

Pour des très petites valeurs de la vitesse v l'expression précédente se simplifie et l'on a

$$(9a) \quad 2 \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{whn}{p'} \sqrt{\frac{1}{1 + m \cdot h \cdot n(w, v)/p'^2}}.$$

Pour des mouvements pendulaires $\sin \vartheta/2$ est compris entre les limites suivantes:

$$(10) \quad \frac{whn}{p'} \sqrt{\frac{1}{1 + mhn(w, v_0)/p'^2}} \leq 2 \sin \frac{\vartheta}{2} \leq \frac{whn}{p'} \sqrt{\frac{1}{1 - mhn(w, v_0)/p'^2}}$$

Dans le cas de la mécanique relativiste on doit poser

$$T'' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V''^2/c^2}}, \quad T' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V'^2/c^2}}, \quad p'' = \frac{mV''}{\sqrt{1 - V''^2/c^2}}, \quad p' = \frac{mV'}{\sqrt{1 - V'^2/c^2}},$$

où V'' est la vitesse de la particule diffusée et V' la vitesse de la particule incidente.

L'équation (5) s'écrit alors:

$$(5a) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V''}{c}\right)^2}} \left\{ 1 - \frac{v V''}{c^2} \cos(v, V'') \right\} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V'}{c}\right)^2}} \left\{ 1 - \frac{v V'}{c^2} \cos(v, V') \right\}.$$

S-Particles. (*)

M. ANNIS, H. BRIDGE, H. COURANT, S. OLBERT and B. ROSSI

*Physics Department and Laboratory for Nuclear Science and Engineering,
Massachusetts Institute of Technology - Cambridge, Massachusetts*

(ricevuto il 14 Giugno 1952)

A multiplate cloud chamber operated at 3260 meters altitude and triggered by a penetrating shower detector has yielded several pictures of particles that come to rest in the plates and subsequently decay, each giving rise to a single secondary charged particle of practically minimum ionization. In some cases the event can be interpreted as a $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ decay process. The μ -meson, because of its small energy (~ 4 MeV), has practically zero probability of emerging from the plate where it has been produced and the outgoing particle is the electron arising from its decay.

In a few cases, however, the scattering of the primary particle, as well as the penetration and the scattering of the secondary particle, rules out the above interpretation and suggests the existence of particles heavier than π -mesons, which when disintegrating at rest, give rise to charged secondaries heavier than electrons and with kinetic energies of the order of 100 MeV. For short, we shall call these particles S-particles.

ANNIS and BRIDGE published the first cloud chamber picture of an S-particle

in May, 1951 ⁽¹⁾. The picture of another S-particle, obtained more recently, is reproduced in Fig. 1. The accompanying table contains a summary of the measurements made on the primary and on the secondary tracks for both these events. The plates in the cloud chamber are lead, 7.2 g cm⁻² thick. Plate No. 0 is the plate where the S-particle stops and decays. The other plates are numbered in order of increasing distance from plate No. 0. φ represents the projected angle of scattering in the plate; R is the residual range of the incident particle as it enters the plate; x is the total thickness of lead traversed by the secondary particle from the point of decay to the point where it leaves the plate. In both cases the secondary particle leaves the illuminated region of the cloud chamber after the last traversal listed in the table.

A simple inspection of the two cloud chamber pictures strongly suggests that in neither case can the secondary particle be an electron since it passes through many radiation lengths of lead without multiplication. To make a more quanti-

(*) The work described was supported by the joint program of the Atomic Energy Commission and the Office of Naval Research.

⁽¹⁾ H. S. BRIDGE and M. ANNIS: *Phys. Rev.*, **82**, 445 (1951); see also B. ROSSI, H. S. BRIDGE and M. ANNIS: *Rend. Lincei*, **11**, 73 (1951).

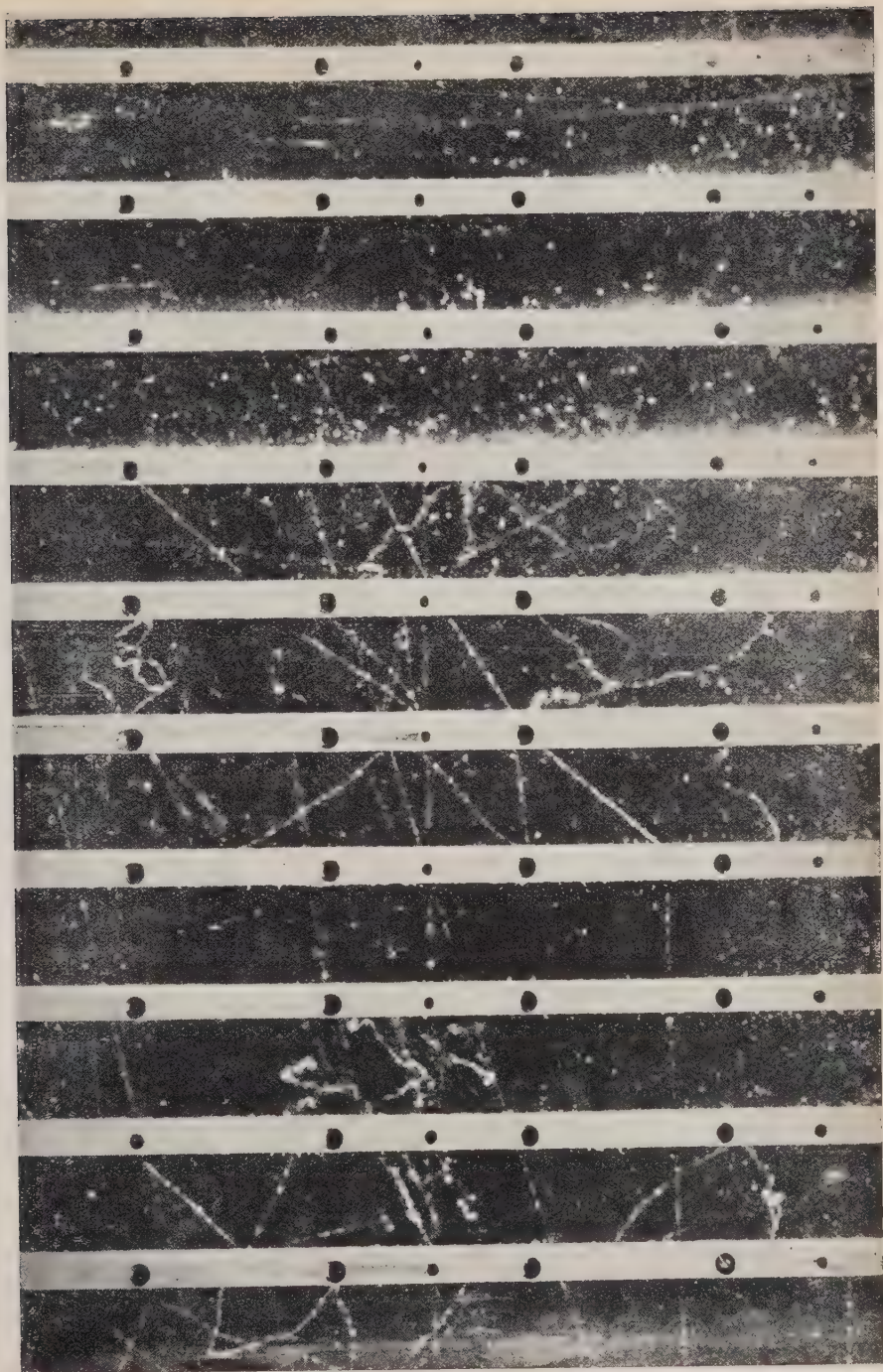


Fig. 1.

tative argument against the possibility of explaining the events either as $\mu \rightarrow e$ or $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ decay processes, consider that the maximum energy of the decay electron from a μ -meson is 54 MeV. Before reaching the end of its visible trajectory, a relativistic electron would lose by ionization alone 40 MeV in event No. 1 and 31 MeV in event No. 2. Since the average radiation loss of electrons in lead is much greater than their ionization loss, it appears extremely unlikely that electrons of less than 54 MeV could penetrate the thickness of lead that the secondary particles are seen to penetrate in events No. 1 or No. 2.

Also the root mean square projected angle of scattering of an electron in 7.2 g cm^{-2} of lead is approximately 17° at 54 MeV, and increases rapidly with decreasing energy. The observed root mean square projected angle of scattering of the secondary particle is only 5° in case No. 1 and 2° in case No. 2.

Finally, an evaluation of the masses of the primary particles based on scattering and range indicates that these particles are heavier than μ -mesons. Indeed, if one assumes that the particles No. 1 and No. 2 are identical, one finds using a method developed by ANNIS, BRIDGE, and OLBERT ⁽²⁾: $m_s = 1420 (+910, -450)$ electron masses. If one assumes that, in both events, the secondary products have the same value of $p\beta$, one finds from the scattering angles ⁽²⁾: $p\beta = 217 (+61, -56) \text{ MeV}/c$.

In addition to the two events described above, we have observed three cases in which a particle stops in a plate and gives rise to a secondary particle that penetrates more than 14 g cm^{-2} of lead without multiplication, and then leaves the illuminated region. In none of these cases is the behavior of the secondary particle such as to rule out

TABLE

Summary of measurements on the primary and secondary tracks for events No. 1 and No. 2 as explained in the text.

| Plate No. | PRIMARY PARTICLE | | | |
|-----------|-------------------|---------------------------|-------------------|---------------------------|
| | Event No. 1 | | Event No. 2 | |
| | φ deg. | R g cm^{-2} | φ deg. | R g cm^{-2} |
| 9 | 1 | 66.4 | — | — |
| 8 | 4 | 59.1 | — | — |
| 7 | 5 | 51.8 | — | — |
| 6 | 4 | 44.5 | — | — |
| 5 | 1.5 | 37.2 | — | — |
| 4 | 2 | 29.9 | 1.5 | 30.6 |
| 3 | 1.5 | 22.6 | 1 | 23.5 |
| 2 | 3.5 | 15.30 | 4.5 | 16.20 |
| 1 | 22 | 8.00 | 16 | 8.90 |
| 0 | — | 0.73 | — | 1.61 |

SECONDARY PARTICLE

| Plate No. | Event No. 1 | | Event No. 2 | |
|-----------|-------------------|---------------------------|-------------------|---------------------------|
| | φ deg. | x g cm^{-2} | φ deg. | x g cm^{-2} |
| 0 | — | 6.6 | — | 5.7 |
| 1 | 9 | 13.9 | 2 | 13.0 |
| 2 | 1.5 | 21.2 | 2.5 | 20.3 |
| 3 | 1.0 | 28.5 | 2.0 | 27.6 |
| 4 | 5 | 35.8 | — | — |

the possibility that this particle is the decay electron of a μ -meson. However, from scattering and range the primary particles appear to be definitely heavier than π - or μ -mesons. It is thus likely that the three additional events also represent the decay of S-particles. If one accepts this assumption and re-evaluates the mass of the S-particle using the data from all five events, one obtains: $m_s = 1780 (+690, -450)$ electron masses.

Shortly after the publication of the first S-particle picture, O'CEALLAIGH and his collaborators reported the observation

⁽²⁾ Application of Multiple Scattering Theory to Cloud Chamber Measurement II. Submitted for publication in the *Phys. Rev.*

of particles with mass around 1000 electron masses, which, after coming to rest in photo-emulsions, disintegrate into μ -mesons ⁽³⁾. These particles are known as χ -particles. It appears probable that the S-particles are identical to the χ -particles. It is possible, too, that they are identical with some of the particles that, when disintegrating in flight, are described as « charged V-particles ».

⁽³⁾ C. O'CEALLAIGH: *Phil. Mag.*, **42**, 1032 (1952).

However, the question as to the number of different unstable charged particles that are responsible for the various experimental observations is still open. Until this question is clarified, it is best to maintain a purely phenomenological classification of the events with the full realization that when we speak of V-particles, χ -particles, and S-particles, we may call by different names particles of the same kind or, conversely, we may include under the same name particles of different kinds.

Transizioni proibite negli spettri di risonanza paramagnetica degli allumi di cromo.

P. BROVETTO e S. FERRONI

Istituto di Fisica dell'Università. Centro di Studio per l'Elettrofisica del C.N.R. - Torino

(ricevuto il 5 Giugno 1951)

È noto che nello spettro di risonanza paramagnetica degli allumi di cromo compaiono delle righe corrispondenti a transizioni in cui $\Delta S_z > 1$ ⁽¹⁾ ⁽²⁾. Analoghe transizioni sono state riscontrate nell'allume di ferro da GÖRTER ⁽³⁾, il quale ha tentato di darne un'interpretazione qualitativa in base ai risultati sperimentali. In realtà in un precedente lavoro di WEISS sull'allume di cromo ⁽⁴⁾, sono date delle formule approssimate che legano le probabilità di transizione alla separazione dei livelli di spin in assenza di campo magnetico, e al campo magnetico stesso. Poichè però nel lavoro di WEISS non è chiara l'impostazione fisica del calcolo, e sono riportati d'altra parte risultati incompleti, ci pare utile riprendere con maggiore dettaglio la questione in vista soprattutto della maggiore im-

portanza da essa assunta in seguito alla conferma sperimentale dell'effettiva esistenza di tali transizioni.

In generale le transizioni in prima approssimazione proibite hanno una debole probabilità di avvenire come effetto di quadrupolo, come doppio salto per assorbimento simultaneo di due fotoni, o perchè provocate da perturbazioni che mescolano le autofunzioni di spin. Nel nostro caso, trattandosi di onde centimetriche molto lunghe rispetto alle dimensioni dello ione Cr^{+++} , sono da escludersi le transizioni di quadrupolo; parimenti è da escludersi l'assorbimento simultaneo di due fotoni poichè, come si può vedere facilmente, esso richiederebbe valori del campo magnetico paragonabili a quelli corrispondenti alle transizioni permesse, mentre l'esperienza indica per le transizioni proibite valori del campo magnetico circa metà dei precedenti. Quanto alle perturbazioni capaci di mescolare le autofunzioni di spin, possiamo pure escludere l'accoppiamento magnetico fra gli ioni Cr^{+++} sulla scorta dei risultati sperimentali di GÖRTER ⁽³⁾ ottenuti nel caso analogo dell'allume di ferro.

Si può pertanto affermare che le tran-

⁽¹⁾ R. MALVANO e M. PANETTI: *Nuovo Cimento*, **7**, 28 (1950).

⁽²⁾ A. F. KIPP, C. F. DAVIS, L. JENNINGS, D. REINER e R. MALVANO: *Nuovo Cimento*, **8**, 683 (1951).

⁽³⁾ J. UBBINK, J. A. POULIS e J. GÖRTER: *Proceedings of the international conference on spectroscopy at radio frequencies*. Amsterdam, 18-23 settembre 1950.

⁽⁴⁾ P. R. WEISS: *Phys. Rev.*, **73**, 470 (1948).

sizioni proibite sono provocate dall'effetto Stark del campo elettrico cristallino, e più precisamente della componente trigonale di esso, alla quale va fatta risalire la separazione iniziale δ esistente fra i livelli $\pm 3/2$ e $\pm 1/2$. Difatti, facendo uso dell'operatore hamiltoniano (5):

$$\mathcal{H} = \delta S_z^2 - \beta H_z g \sigma_z - \beta g (H_x \sigma_x + H_y \sigma_y),$$

in cui σ_x , σ_y , σ_z , sono gli operatori di spin, β il magnetone di Bohr, g il fattore di Landé, H_x , H_y , H_z , le componenti del campo magnetico, si possono ottenere facilmente per le orientazioni in cui il campo magnetico H è normale rispettivamente alle facce (100) e (111) dell'ottaedro, i seguenti valori relativi per le probabilità di transizione fra i vari termini del multipletto di spin:

$$P_{(-1/2)(1/2)} = 1,$$

$$P_{(-3/2)(-1/2)} = \frac{3}{4}; \quad P_{(1/2)(3/2)} = \frac{3}{4},$$

$$P_{(+3/2)(-1/2)} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^3 \right],$$

$$P_{(-3/2)(+1/2)} = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^3 \right],$$

$$P_{(-3/2)(3/2)} = \left(\frac{7}{12} \right)^2 \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^4,$$

quando H è normale alla faccia (100).

Quando H è normale alla faccia (111), le transizioni proibite diventano invece:

$$P_{(-3/2)(1/2)} = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^2 - \frac{14}{9} \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^3 \right],$$

$$P_{(-1/2)(3/2)} = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^2 + \frac{14}{9} \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^3 \right],$$

$$P_{(-3/2)(3/2)} = \left(\frac{4}{27} \right)^2 \left(\frac{\delta}{\beta g H} \right)^4.$$

Appare evidente che, mentre le transizioni permesse risultano indipendenti dalla separazione δ dei livelli, le transizioni in cui $\Delta S_z = 2$ sono dell'ordine di $(\delta/\beta g H)^2$ e manca la simmetria fra le transizioni $-3/2 \rightarrow -1/2$ e $3/2 \rightarrow -1/2$, mentre la transizione in cui $\Delta S_z = 3$ è dell'ordine di $(\delta/\beta g H)^4$. Poichè nell'allume di cromo $\delta = 0,12 \text{ cm}^{-1}$ si ha, ad esempio per onde di 1 cm, che le intensità delle righe corrispondenti alla transizione in cui $\Delta S_z = 2$ sono circa il 3,8% della transizione $-1/2 \rightarrow 1/2$, quando il campo H è normale alla faccia (100), e l'1,7% quando il campo H è normale alla faccia (111). Per le transizioni in cui $\Delta S_z = 3$ si ottengono rispettivamente, per le due orientazioni (100), (111), i valori dello 0,57% e dello 0,037%. Le formule da noi ottenute sono in accordo con i risultati numerici dati da WEISS con un'approssimazione inferiore alla nostra e limitatamente al caso in cui H è normale alla faccia (100) del cristallo. Mancano per ora misure sperimentali accurate dell'intensità delle righe corrispondenti alle transizioni proibite.

(*) M. H. L. PRYCE: *Proc. Phys. Soc.*, A **63**, 25 (1950).

Sulla distribuzione anomala delle stelle di disintegrazione prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche.

L. BARBANTI SILVA, C. BONACINI, C. DEPIETRI, G. LOVERA e E. PERILLI FEDELI

Istituto di Fisica dell'Università - Modena

(ricevuto il 17 Giugno 1952)

È stata segnalata, da LEPRINCE-RINGUET e HEIDMANN ⁽¹⁾, e da LI e PERKINS ⁽²⁾, l'esistenza di una anomalia nella distribuzione delle stelle di disintegrazione prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni nucleari. Precisamente, secondo i sopracitati Autori, il numero di coppie di stelle vicine (i cui centri cadono a distanze non eccedenti circa 1,5 mm, per lastre dello spessore di 100 μ), risulterebbe nettamente superiore a quello calcolabile per una distribuzione casuale, secondo la legge di Poisson.

Anzi, da una trattazione più estesa della questione, fatta da LI ⁽³⁾, risulta che l'eccesso di coppie di stelle vicine è assai superiore a quello giustificabile (allo stato attuale delle conoscenze di questi processi) sia mediante un processo rigenerativo, cioè nell'ipotesi che una delle stelle della coppia sia prodotta da una particella veloce emessa dall'altra stella, sia nell'eventualità che si tratti di stelle prodotte successivamente da una stessa particella veloce nell'attraversare l'emulsione.

Però un recente lavoro di DAVIES ⁽⁴⁾ mette in dubbio la consistenza dell'effetto in questione, nella misura riscontrata da LI, o perlomeno contesta che il materiale statistico di cui LI si è servito sia idoneo a garantire l'esistenza del fenomeno, perchè la statistica di LI sarebbe influenzata dal fatto che l'esplorazione delle lastre non è stata sufficientemente accurata.

Nella presente nota riferiamo brevemente i risultati di un analogo esame statistico effettuato su un gruppo di lastre Ilford G 5, spesse 200 μ , che erano state esposte all'altezza di 3500 m, parte senza materiale condensato sovrapposto, parte sotto 2 cm di paraffina, e parte ancora sotto 13 cm di paraffina.

Sono state prese in considerazione le stelle aventi tre o più rami, con centro nell'emulsione (1359 stelle su 73,5 cm²); inoltre, come termine di confronto, su di una parte delle lastre si è rilevata anche la distribuzione delle stelle di particelle α , con centro nell'emulsione, dovute ad inquinazioni radioattive del materiale (1603 stelle su 23,0 cm²): per queste ultime, non c'è motivo di pensare ad una distribuzione che non sia casuale. Nelle tabelle I e II sono riportati i valori speri-

⁽¹⁾ L. LEPRINCE-RINGUET e J. HEIDMANN: *Nature*, **161**, 844 (1948).

⁽²⁾ T. T. LI e D. H. PERKINS: *Nature*, **161**, 844 (1948).

⁽³⁾ T. T. LI: *Phil. Mag.*, **41**, 1152 (1950).

⁽⁴⁾ G. DAVIES: *Phil. Mag.*, **43**, 472 (1952).

mentali $n_{\text{oss}}(r_p)$ dei numeri di coppie di stelle separate da una distanza la cui proiezione sul piano dell'emulsione non supera il corrispondente valore di r_p scritto nella prima orizzontale di ogni tabella: la statistica si estende, per ora, fino a distanze di 1 mm per le stelle della radiazione cosmica, e di 0,8 mm per le stelle di particelle α , per le quali il materiale statistico è più abbondante. Le frequenze $n_c(r_p)$ sono state calcolate, nell'ipotesi di una distribuzione casuale, mediante la formula, già usata da LI ⁽³⁾:

$$n_c(r_p) = \sum_i \frac{N_i(N_i - 1)}{2} \cdot \frac{\pi r_p^2}{ab} \left[1 - \frac{4(a+b)r_p}{3\pi ab} + \frac{r_p^2}{2\pi ab} \right],$$

dove N_i è il numero di stelle osservato nella i -esima lastra, e a, b sono i lati del rettangolo esplorato in ogni lastra (nel nostro caso, l'ultimo termine correttivo era di entità trascurabile).

TABELLA I. — *Coppie di stelle di particelle α .*

| r_p (mm) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 |
|--|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $n_{\text{oss}}(r_p)$ | 15 | 72 | 151 | 274 | 436 | 615 | 841 | 1139 |
| $n_c(r_p)$ | 17,6 | 70,2 | 157,6 | 279,6 | 435,5 | 625,2 | 849,3 | 1105,9 |
| $10^3 \cdot \frac{n_{\text{oss}} - n_c}{\sum_i N_i}$ | -1,6 | +1,1 | -4,1 | -3,5 | +0,3 | -6,4 | -5,2 | +20,6 |

TABELLA II. — *Coppie di stelle della radiazione cosmica.*

| r_p (mm) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|--|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n_{\text{oss}}(r_p)$ | 5 | 16 | 38 | 61 | 100 | 128 | 189 | 255 | 324 | 400 |
| $n_c(r_p)$ | 4,1 | 16,0 | 36,1 | 63,8 | 99,4 | 142,9 | 193,9 | 252,5 | 318,8 | 392,6 |
| $10^3 \cdot \frac{n_{\text{oss}} - n_c}{\sum_i N_i}$ | +0,7 | 0,0 | +1,4 | -2,1 | +0,4 | -11,0 | -3,6 | +1,8 | +3,8 | +5,4 |

L'ultima orizzontale di ogni tabella indica lo scarto tra i numeri di coppie di stelle osservate e calcolate, riferito a 1 000 stelle: appare chiaramente che tale scarto fluttua tra valori positivi e negativi sia per le stelle di particelle α , sia per quelle della radiazione cosmica, senza che risulti un eccesso sistematico.

Applicando il criterio del χ^2 ai numeri di coppie di stelle le cui separazioni, in proiezione, cadono nei successivi intervalli: mm 0,0 - 0,1; 0,1 - 0,2; ..., si trova che la probabilità che gli scarti osservati, tra dati sperimentali e calcolati, siano semplicemente casuali, è $p = 0,33$ per le stelle di particelle α , e $p = 0,43$ per le stelle della radiazione cosmica, valori abbastanza grandi, tali da non permettere di stabilire una deviazione sistematica: è inoltre significativo il fatto che le probabilità siano dello stesso ordine di grandezza tanto per le stelle della radiazione cosmica, quanto per quelle di particelle α , per le quali ultime la distribuzione casuale è la più plausibile.

Per le stelle della radiazione cosmica, la statistica delle coppie vicine è anche stata effettuata separatamente per le lastre senza materiale solido sovrapposto o

sotto 2 cm di paraffina (679 stelle - gruppo A: tabella III) e per quelle sotto 13 cm di paraffina (680 stelle - gruppo B: tabella IV).

TABELLA III. - *Coppie di stelle della radiazione cosmica: gruppo A.*

| | | | | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| r_p (mm) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $n_{\text{oss}}(r_p)$ | 2 | 7 | 21 | 35 | 55 | 71 | 101 | 132 | 164 | 199 |
| $n_c(r_p)$ | 2,1 | 8,2 | 18,6 | 32,7 | 51,0 | 73,3 | 99,4 | 129,5 | 163,4 | 201,5 |
| $10^3 \cdot \frac{n_{\text{oss}} - n_c}{\sum_i N_i}$ | -0,1 | -1,8 | +3,5 | +3,4 | +5,9 | -3,4 | +2,4 | +3,7 | +0,9 | -3,7 |

TABELLA IV. - *Coppie di stelle della radiazione cosmica: gruppo B.*

| | | | | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|-------|------|-------|-------|-------|
| r_p (mm) | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| $n_{\text{oss}}(r_p)$ | 3 | 9 | 17 | 26 | 45 | 57 | 88 | 123 | 160 | 201 |
| $n_c(r_p)$ | 2,0 | 7,8 | 17,5 | 31,1 | 48,4 | 69,6 | 94,5 | 123,0 | 155,4 | 191,5 |
| $10^3 \cdot \frac{n_{\text{oss}} - n_c}{\sum_i N_i}$ | +1,5 | +1,8 | -0,7 | -7,5 | -5,0 | -18,5 | -9,6 | 0,0 | +6,8 | +14,0 |

Anche queste distribuzioni appaiono casuali. Le rispettive probabilità, secondo il criterio del χ^2 , sono $p = 0,93_5$ per il gruppo A, e $p = 0,37$ per il gruppo B, entrambe elevate: la loro differenza non è sufficiente ad indicare una divergenza sistematica di comportamento tra i due gruppi di stelle.

È da osservare che gli scarti, riferiti a 1000 stelle, nelle nostre osservazioni, risultano, in valore assoluto, dello stesso ordine di grandezza di quelli trovati da LI, (anzi, in media, generalmente un po' inferiori); però, mentre il segno nei dati di LI è, salvo che in un caso, persistentemente positivo, si dà da far denotare un eccesso sistematico delle frequenze sperimentali, nella nostra statistica, invece, non c'è preferenza tra scarti positivi e negativi. Poichè, per altro, c'è da attendersi che il processo rigenerativo intervenga a produrre una certa deviazione dalla distribuzione puramente casuale delle stelle, dai risultati ora riferiti si può dedurre che la deviazione dovuta a questo e ad altri eventuali processi deve essere assai più piccola di quella segnalata da LI, sicchè essa è mascherata dalle fluttuazioni statistiche dei dati sperimentali surriferiti.

Si tratta comunque di una questione aperta ad ulteriori indagini statistiche, a condizione di operare su materiale molto più ricco.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

B. BELLION, F. DE MICHELIS - *L'energia atomica e sue applicazioni biologiche. Introduzione all'impiego degli isotopi in biologia e medicina.* Un vol. di XVI + 572 pagg. con 43 tabelle e 117 figure. Rosenberg e Sellier, Torino, 1951. L. 7000.

È opinione assai diffusa che gli studiosi italiani dotati della necessaria preparazione dedichino troppo piccola parte della loro attività a scriver libri e trattati, su cui i più giovani possano facilmente fondare la loro cultura e preparazione generale. Tanto più meritevole e degno di lode è dunque il coraggio con cui questi due giovani dell'Università di Torino, il BELLION del Reparto Radiologico della Clinica Medica e la DE MICHELIS dell'Istituto di Fisica, hanno affrontato la difficile impresa di scrivere un'ampia « Introduzione all'impiego degli isotopi in biologia e medicina ».

Gli straordinari progressi che in questi ultimi anni ha fatto in ogni parte del mondo la Biofisica non hanno avuto finora qui da noi una eco corrispondente e di ciò è senza dubbio causa principale la mancanza di una cultura e di una preparazione fisica adeguata tra i nostri laureati in scienze biologiche. Questo libro si propone sostanzialmente lo scopo di riunire in un unico volume e di offrire al biologo e al medico tutto quel complesso di nozioni che egli non ha appreso dai corsi universitari e che pur sono indispensabili per chiunque voglia trar partito dalle nuove conquiste della biofisica. Tra le numerosissime lacune della nostra letteratura scientifica, esso tende dunque a colmarne una che in questo momento è particolarmente sen-

tita e ci si deve augurare ch'esso abbia un buon successo ed una larga divulgazione tra la nostra gioventù studiosa.

Il volume, cui Rosenberg e Sellier hanno dato un'ottima veste tipografica, risulta suddiviso in due parti di ampiezza pressochè uguale. I primi otto capitoli (pagg. 1-260), di contenuto esclusivamente fisico, raccolgono tutte quelle nozioni sulla struttura dell'atomo e del suo nucleo, sulla dinamica delle reazioni nucleari, sui metodi di produzione e di rivelazione delle radiazioni nonchè su quelli di separazione degli isotopi stabili e radioattivi, che gli Autori ritengono necessarie a chi voglia mettersi in condizioni di far uso sensato degli isotopi ai fini biologici e terapeutici. Il capitolo finale di questa prima parte espone i fondamenti della teoria degli errori e raccoglie quelle formule fondamentali che permettono di valutare la significatività di un risultato sperimentale. La seconda parte, costituita dai capitoli IX-XIX (pag. 261-574), inizia con la descrizione dei fenomeni fisici di interazione tra radiazioni e materia e dei principali effetti della radiazione su organi e tessuti viventi. Un capitolo sulla dosimetria delle radiazioni delle varie specie precede un gruppo di sei capitoli dove si espongono sistematicamente le applicazioni biologiche e cliniche degli isotopi più usati (deuterio e tritio, isotopi del carbonio, azoto, sodio, potassio, ferro, fosforo e iodio). Chiudono il volume un capitolo sulla terapia dei tumori coi radioisotopi ed uno sulle offese atomiche e la relativa protezione.

Come si vede anche da questo breve sommario, il piano dell'opera è assai ampio e ambizioso e tende a far sì che

la « Introduzione » preannunciata nel titolo divenga in realtà quasi un manuale ove si trovi ciò che può interessare sull'argomento. Ma, come sempre avviene in questi casi, non si può dire che il conflitto tra il libro di divulgazione, il trattato di carattere sostanzialmente didattico e il manuale di consultazione sia stato dagli Autori felicemente risolto. Tale conflitto è anzi evidente e continuo di pagina in pagina e finisce coll'impedire che il volume assuma una sua fisionomia definita. Viene anzi fatto talora di chiedersi se gli Autori si siano mai posti il problema del pubblico: quali siano i lettori a cui si rivolgono. Non certo i fisici, dato che la descrizione dei fenomeni base è sommaria e divulgativa e resta molto al di sotto del livello degli ordinari corsi universitari di secondo biennio. E neppure certamente i biologi, che trovano nel volume una vera inflazione di nozioni dogmaticamente impartite e non pertinenti strettamente allo scopo: nozioni il cui unico effetto è certamente quello di rimescolare le loro poche idee fisiche fondamentali, rendendo più ardua e più confusa la via, già difficile, da percorrere.

Riteniamo in altre parole che se il libro deve essere una « Introduzione » alla Biofisica, sarebbe vantaggiosissima un'energica potatura che sopprima tutte le nozioni non necessarie e ponga le necessarie in una luce chiara e in un ordine rigoroso, quale desidera il discente. Se poi il libro vuole invece essere un vero trattato, converrebbe allora sopprimere tutta la parte più elementare e spingere la descrizione e l'analisi dei fenomeni pertinenti all'argomento ai limiti di ciò che oggi si sa. (In ogni caso, consiglieremmo agli Autori di sopprimere dovunque le battute di spirito e i punti esclamativi).

Questo per ciò che riguarda l'impostazione generale. Altre critiche più particolari ci si son presentate nel corso della lettura: di esse citeremo qui alcune delle più importanti, tralasciando le

altre. La terminologia fisica è spesso non corrispondente all'uso, per traduzione inesatta dei termini inglesi. Per esempio, anzichè *potere di arresto* (pag. 269) si dice in italiano *potere frenante*; la *Bremsstrahlung* si chiama in italiano *radiazione di frenamento* e non di rallentamento (pag. 277); la cera pesante (pag. 299) è probabilmente paraffina pesante, e così via. Altre volte si adoperano i termini inglesi mentre esistono i corrispondenti italiani: così il *range* delle particelle si chiama in italiano *percorso*. Altrove ancora, i termini vengono adoperati in senso non proprio, come la parola *metastabile* alle pagg. 88 e 265, o addirittura errato, come alla pag. 284 dove la quantità di moto (impulso) del fotone, viene confusa col momento della quantità di moto.

Altri rilievi di natura più propriamente fisica sono da fare per esempio alle pag. 102 e 107, dove non si tien conto che in una reazione endoenergetica l'energia di soglia è maggiore dell'energia di reazione, perchè nella formazione del nucleo composto si deve conservare la quantità di moto e di conseguenza l'energia cinetica del nucleo composto non può essere nulla; alle pagg. 132, e 138, dove non risulta che gli elettrodi cilindrici disposti lungo un tubo acceleratore, anzichè servire a ripartire uniformemente la tensione lungo il tubo, sono elementi di lenti elettrostatiche calcolate con funzione essenzialmente focalizzatrice; alla pag. 289, dove si riporta da un articolo di EVANS una suddivisione del coefficiente di assorbimento per effetto Compton in due addendi, uno di assorbimento energetico e l'altro di diffusione, che lascia molto perplessi dal punto di vista concettuale; alla pag. 59, dove si attribuisce una vita media minore di 10^{-6} s al positone, senza chiarire ch'esso di per sè è stabile e che tale vita media deriva soltanto, entro la materia, dalla probabilità di annichilimento con un elettrone di questa; alla pag. 57, ove si trova l'enigmatica affermazione che una lastra metallica bom-

bardata con neutroni è una sorgente di positroni, ecc. ecc.

Tutte queste critiche e tutti questi rilievi, che facciamo soprattutto per dar più peso e valore all'apprezzamento iniziale, è sperabile che abbiano il risultato di incitare gli Autori a rivedere e semplificare il testo, rendendolo più idoneo a vincere quell'atmosfera di restia incomprensione che ancor oggi circonda da noi in molti ambienti la nascente Biofisica.

M. AGENO

LOUIS DE BROGLIE - *Particules de spin 1/2*. Gauthier-Villars, Paris, 1952, volume litogr., VIII-164 pagine.

I primi capitoli di questo libro, consacrato allo studio delle particelle di spin $1/2$ (elettroni di Dirac), trattano dei principi della meccanica ondulatoria e della sua interpretazione fisica. L'Autore passa quindi alla esposizione della teoria quantistica dei momenti angolari ed allo studio dello spin e del momento magnetico dal punto di vista relativistico; a questo proposito Egli espone, analizza e critica una dinamica relativistica dei fluidi e delle particelle dotati di spin dovuta a JAN V. WEISSENHOFF.

La parte centrale del libro è costituita da una esposizione molto chiara della teoria di Dirac sull'elettrone.

I due ultimi capitoli sono consacrati al problema della misura diretta dello spin dell'elettrone. L'Autore conclude a questo proposito che gli argomenti di BOHR tendenti a dimostrare la impossibilità di tale misura sono validi solo nel caso di velocità piccola rispetto a quella della luce e che il passaggio all'approssimazione all'ottica geometrica nella teoria di Dirac non consente di escludere a priori la possibilità di mettere direttamente in evidenza il momento magnetico intrinseco dell'elettrone.

I cultori di fisica teorica non mancheranno di apprezzare questo libro in cui un Autore di tanta fama espone il suo punto di vista su questioni di grande interesse ed attualità.

S. GALLONE

RICHARD VON MISES - *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. Un vol. in 16°, pp. X + 278, Springer-Verlag, Wien, 1951.

Si tratta della terza edizione tedesca, rielaborata ed aggiornata, di una « introduzione alle nuove teorie della probabilità ed alle loro applicazioni » che ha avuto meritato successo anche nelle traduzioni inglese, russa e spagnola. È notevole infatti la densità di informazione dei brevi e chiari capitoli dedicati ai principali teoremi del calcolo delle probabilità ed alle loro applicazioni alla teoria degli errori, alla statistica generale ed alle statistiche sociali e biologiche, alla termodinamica ed alla teoria cinetica dei gas, alle statistiche quantistiche ed alle questioni connesse con il principio di causalità ed il principio di indeterminazione.

Dato il carattere elementare della trattazione, destinata ad un pubblico di non specialisti, riveste però particolare importanza la parte del volume (circa un terzo) dedicata alle polemiche sulla definizione di « probabilità », sui fondamenti del calcolo delle probabilità e le sue relazioni con le altre branche della matematica, sul significato « epistemologico » dei concetti ivi usati e la loro connessione con il concetto filosofico e scientifico di « verità ». Le considerazioni di R. VON MISES, che a questi problemi ha dedicato anche volumi di specifico interesse filosofico, permettono di apprezzare l'evoluzione storica che, attraverso la critica dei fondamenti inaugurata da MACH e POINCARÉ, ha por-

tato dal concetto di probabilità matematica di Laplace al concetto della frequenza di ripetizione di un evento come « misura » della probabilità alla stessa stregua in cui il livello del mercurio in un termometro dà la « misura » della temperatura. Ma che questo significhi aver ridotto la probabilità ad un concetto fisico, e favorisca quindi la concezione probabilistica della verità attribuita dagli epistemologi alla fisica moderna, può apparire assai dubbio a chi tenga presente la completa indipendenza del concetto di

predizione da quello di spiegazione, quindi del concetto di probabilità da quello di verità: il lettore che di tale indipendenza abbia solo l'idea datagli dal linguaggio ordinario, potrebbe pertanto venire indotto dalle considerazioni di von MISES e dei suoi predecessori a vedere una mole di problemi, per di più insolubili come sempre nella « Erkenntnistheorie » filosofica, proprio là dove invece la tecnica dello scienziato non epistemologo procede più tranquillamente.

VITTORIO SOMENZI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA
